EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

EXAMENNUMMER 2017

Besprekingen van examens vmbo, havo en vwo

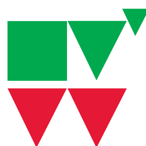
Statistiek in het havo-examen

Algebraïsche vaardigheden in de nieuwe examens havo en vwo

Wiskundige denkactiviteiten in de examens havo en vwo

NR.1

JAARGANG 93 - SEPTEMBER 2017



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 93 NR. 1

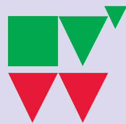
IN DIT NUMMER





Secretions 1997 (detail), Anthony Cragg.
Foto: Tom Goris. Met toestemming van Anthony Cragg en Pictoright.

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Kort vooraf

Zoals gewoonlijk begint de nieuwe jaargang, de 93e, met het examennummer. Er was weer veel over de examens te doen in de diverse media. Gelukkig eindigen in deze *Euclides* een aantal recensies met complimenten voor de makers, voor hun creativiteit met name. En laten we vooral blij zijn dat de examenopgaven door collega's gemaakt worden, mensen die het veld en de leerlingen zélf kennen. Er zijn landen genoeg waar die opgaven (en ook de methodes) uit ivoren torens naar beneden worden geworpen ...
Een nieuwe jaargang betekent ook weer een nieuw uiterlijk. Wellicht geïnspireerd door het gegeven dat De Stijl honderd jaar bestaat, is het thema van de studiedag van dit jaar: 'Wiskunde uit de kunst'. Op de voorkant komen daarom kunstwerken te staan waarin wiskunde min of meer toevallig terecht gekomen is. Zoals *Secretations* van Tony Cragg, een Britse beeldhouwer die een geheel eigen opvatting over geometrie heeft. Hij woont en werkt in Wuppertal waar veel van zijn werk te zien is in *Skulpturpark Waldfrieden*. Maar je kunt ook in Nijmegen het centraal station uitlopen om een echte Cragg te zien. Uiteraard zijn suggesties voor de voorkant van harte welkom!
De redactie kent een wijziging. Na twaalf jaar heeft Joke Verbeek de redactie verlaten. Dat wilde ze per se niet eerder doen dan wanneer er een geschikte opvolger was om de vmbo-belangen te behartigen. Die hebben we gevonden in de persoon van Hugo Duivesteijn. Joke: dank voor al je inspanningen, Hugo: welkom!

Tom Goris

EXAMEN VMBO TL

Hugo Duivesteijn

Het vmbo TL- en GL-examen had een N-score van 0,8. Hugo Duivesteijn, de nieuwe vmbo-redacteur van *Euclides*, laat zijn kritische licht schijnen op de contexten, de opgaven en het correctievoorschrift.

Een van de meest gehoorde kritieken op het examen VMBO-TL wiskunde is ieder jaar weer hetzelfde: het zou te talig zijn. Er zou te veel leeswerk zijn en te veel om begrijpend lezen gaan in plaats van om de wiskunde. Het zal voor de makers van de examens ook ieder jaar weer een probleem zijn. Aan de ene kant wil je de kandidaten niet opzadelen met lappen tekst, aan de andere kant vraagt het hedendaagse wiskundeonderwijs om toepassingsvragen die aansluiten bij de belevingswereld van de leerlingen. Als je het examen van dit jaar openslaat en er globaal doorheen gaat, valt direct op dat de makers dit keer hebben geprobeerd niet te veel te zeggen. Ik denk dat het aardig goed gelukt is. Ik loop de vragen even door.

Eindlengte

De eerste vier vragen gaan over de lengte van een meisje, zie figuur 1.

Als je weet wat de lengte van de vader en de lengte van de moeder van een meisje is, kan je de verwachte eindlengte van dit meisje berekenen met de formule

$$\textit{eindlengte} = \frac{(\textit{lengte vader} + \textit{lengte moeder} - 13)}{2} + 4{,}5$$

Hierin zijn *eindlengte*, *lengte vader* en *lengte moeder* in centimeters.



figuur 1

Vervolgens wordt er gevraagd om: een eindlengte te berekenen gegeven de lengte van de beide ouders; de lengte van de moeder te berekenen gegeven lengte van de vader en het meisje; een grafiek te tekenen met het gegeven dat de gemiddelde man in Nederland 1,80 m is en als laatste wordt gevraagd de deelstreep weg te werken bij een gegeven lengte van de vader.

Een prima vraag om het examen mee te beginnen. Eentje uit het boekje. Bijna letterlijk. Toen ik het examen opensloeg moest ik meteen aan mijn tweede klas basisberoeps denken, voor wie het begin van deze vraag nagenoeg hetzelfde is als een opgave in hoofdstuk 6 van *Getal & Ruimte*. Het wegwerken van de deelstreep vraagt een goed inzicht van de rekenvolgorde en de opbouw van deze examenvraag zorgt er volgens mij voor dat de kandidaten goed in het examen kunnen rollen.

Vlieland

De volgende vier vragen horen bij elkaar onder de noemer *Vlieland*. Vraag 5, 6 en 7 zijn goede vragen over rekenen met schaal en verhoudingen. Vraag 8 is een bijzondere vraag. Hierbij worden tekst en plaatjes toegevoegd om de boel te verfraaien, zie figuur 2.

Op de stranden van Vlieland rijdt voor toeristen de 'Vliehors Expres'.



Deze vrachtauto heeft één speciale band die tijdens het rijden het onderstaande gedicht als bandafdruk achterlaat:

> Breng gedachten vol verlangen naar het lege stille strand.
> Schrijf ze duizend stille malen tussen duizend korrels zand.

4p **8** Als de band één keer heeft rondgedraaid, staat het gedicht één keer in het zand. De band heeft een diameter van 145 cm.
→ Bereken hoe vaak het gedicht in het zand staat als de Vliehors Expres 2 km heeft gereden. Schrijf je berekening op.

figuur 2

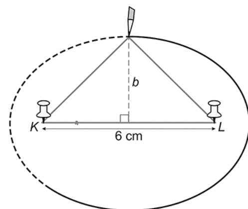
Ik vind vraag 8 een mooie en lelijke vraag tegelijk. Mooi in zijn vraagstelling, waarin alle benodigdheden verpakt zijn. Lelijk, omdat er een stuk context bij zit waar de kandidaat niks aan heeft en eigenlijk alleen maar van zijn à propos kan brengen. Wat ik hier vervelend aan vind is dat we leerlingen allemaal leren de hele vraag te lezen zodat ze alle informatie eruit kunnen destilleren. Bij deze vraag is dat geheel overbodig, sterker nog, ik ben van mening dat leerlingen die dat niet doen bij deze vraag in het voordeel zijn, omdat ze niet afgeleid zullen worden door de voorstelling van deze rijdende dichtregel.

Ellips

De volgende vier vragen zijn gekoppeld onder de noemer *Ellips*, zie figuur 3. Wat mij betreft verdienen de makers van het examen hier een compliment voor de originele manier om het rekenen met oppervlaktes van cirkels te verwerken in het examen. De titel van de opgave doet denken dat het heel ingewikkeld kan zijn, maar het lijkt mee te vallen. Vraag 12 weet zelfs de stelling van Pythagoras op een leuke manier terug te brengen. Vmbo'ers zijn vaak wat meer

Het touwtje is 14 cm. De afstand tussen de twee punaises (*K* en *L*) is 6 cm.

In de tekening hieronder zie je dat het touwtje een gelijkbenige driehoek vormt als het potlood bovenaan is.



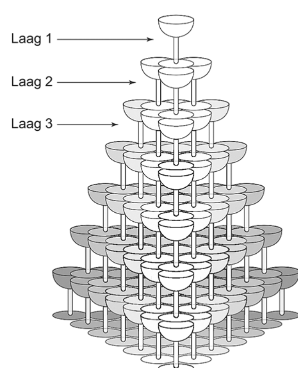
4p **12** Bereken, zonder te meten, hoeveel cm *b* is bij deze ellips. Schrijf je berekening op. Rond je antwoord af op één decimaal.

figuur 3

beeldend ingesteld. Ik heb leerlingen na afloop van het examen met een veter zien proberen een ellips te tekenen. De volgende groep vragen, 13, 14 en 15, zijn prima vragen, maar niet heel bijzonder. Ik ga dus maar gelijk verder met het feest der herkenning voor technische leerlingen: een zijaanzicht van een tuinbank. Deze vragen bevatten goniometrie en F-hoeken. Op het eerste gezicht staat de vraag vol met getallen en tekens. Voor sommigen een beetje overweldigend, maar een typisch voorbeeld van een vraag waarbij je goed moet lezen wat er van je gevraagd wordt, omdat je anders niet weet wat je moet doen. Een mooi setje vragen dus als je het mij vraagt.

Champagnetoren

Dan kom ik aan bij de vraag van dit examen waarover de meeste klachten bij LAKS zijn ingediend. De *Champagnetoren*, zie figuur 4.



Een champagnetoren bestaat uit op elkaar gestapelde champagneglazen. Er wordt champagne in het bovenste glas gegoten. Als het bovenste glas overloopt, stroomt de champagne in de glazen eronder. Zo worden uiteindelijk alle glazen gevuld.

Het aantal glazen per laag in deze champagnetoren kun je berekenen met de formule

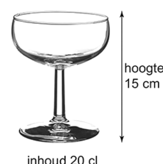
$$\textit{aantal glazen per laag} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Hierin is *n* het nummer van de laag vanaf boven geteld.

figuur 4

De uitleg is strak en iedereen heeft wel eens beelden gezien, al dan niet in een film waarin zo'n toren in elkaar zakt. Vraag 22 is de vraag waar de meeste klachten over zijn gekomen, zie figuur 5.

De Nederlander Luuk Broos heeft een record gevestigd door een champagnetoren te bouwen die uit meer dan 60 lagen bestond. Hij gebruikte hiervoor bijna 45 000 glazen. De onderste laag bestond uit 2016 glazen. Een champagneglas is 15 cm hoog.



inhoud 20 cl

3p **22** Hoeveel cm was de hoogte van de champagnetoren van Luuk Broos? Schrijf je berekening op.

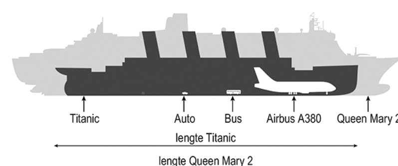
figuur 5

De klacht die over deze vraag het meest werd ingediend was dat de kandidaat van 60 lagen was uitgegaan, omdat dit in de introductie van de vraag staat. Als je het mij vraagt is dit een perfecte vraag om het kaf van het koren te scheiden. Leerlingen die de vraag goed lezen en de benodigde informatie uit de context weten te halen en leerlingen die te snel over de tekst heen gaan om welke reden dan ook. Als je het mij vraagt dus onterechte kritiek op een mooie vraag.

Titanic

De laatste vraag waar ik nog aandacht aan besteed is vraag 24. Deze vraag is onderdeel van drie vragen met als onderwerp *Titanic*, zie figuur 6.

Een van de bekendste schepen ter wereld is de Titanic. Het schip zonk in het jaar 1912 op zijn eerste reis na een aanvaring met een ijsberg. De Titanic was toen het grootste schip ter wereld.
Je ziet een vergelijking van de lengte van de Titanic met de lengte van andere vervoermiddelen.



3p **24** De Titanic was 269 meter lang. Momenteel is de Queen Mary 2 een van de grootste passagiersschepen ter wereld.
→ Bereken hoeveel meter de lengte van de Queen Mary 2 is. Schrijf je berekening op.

figuur 6

Over deze vraag kwamen veel klachten binnen bij LAKS, omdat kandidaten niet door hadden dat hier met verhoudingen gerekend kon worden. De eerlijkheid gebiedt me te zeggen dat ik zelf de vraag ook twee keer heb gelezen voordat ik doorhad waar ik de benodigde informatie vandaan moest halen. Niet de beste vraag van het examen.

Conclusie

Wat mij nog wel een doorn in het oog is, is het correctievoorschrift. Niet het hele model, maar algemene regel 3.8: ‘indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen’, waardoor we het juist noteren van de eenheden niet mee laten tellen. Ik denk dat we van onze leerlingen wel mogen eisen dat ze de eenheden netjes noteren. Desondanks kan ik niet anders dan concluderen dat het de makers gelukt is een goed examen te maken, waarbij het merendeel van de vragen goed aansluit bij het inlevingsvermogen van de kandidaten.

Over de auteur

Hugo Duivesteijn is sinds twee jaar docent wiskunde basisberoepsgerichte leerweg. Vanaf dit schooljaar werkt hij op Het Element in Amersfoort. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*. E-mailadres: *hugoduivesteijn@gmail.com*.

BERICHTEN UIT HET VMBO

Melanie Steentjes

NA TWINTIG JAAR VOOR DE KLAS

Een kleine twintig jaar geleden begon ik met lesgeven. Direct na mijn studie wiskunde deed ik de postdoctorale lerarenopleiding bij het IVLOS in Utrecht en in een jaar was ik klaargestoomd om voor de klas te staan. Dacht ik.

Groen van de universiteit kon ik mijn draai niet echt vinden tussen de leerlingen uit 3 mavo, havo, vwo en 4 havo. Sommigen van hen hadden meer levenservaring dan ik. Ik vond het verschrikkelijk om met u en mevrouw te worden aangesproken en had geen zin om politieagent te spelen. Na een jaar had ik het gezien en vertrok naar het buitenland om te bedenken wat ik dan wel wilde. Terug in Nederland wist ik dat natuurlijk nog steeds niet, maar weer voor de klas wilde ik in ieder geval niet. Een baan bij Cito diende zich aan en dat leek me een mooie nieuwe uitdaging. Inmiddels werk ik alweer zeventien jaar met veel plezier bij Cito, onder andere aan de wiskunde-examens vmbo en de Wiskunde Olympiade. Maar vorig jaar begon het toch te kriebelen. Zo nu en dan ging ik op bezoek bij scholen, bijvoorbeeld om te zien hoe leerlingen met een nieuw ontwikkelde applicatie voor de digitale examens aan de slag gingen. De gesprekjes die ik in dat kader had met leerlingen vond ik erg leuk en ik merkte dat ik vol energie thuiskwam na zo'n dag. Moest ik het lesgeven niet weer een kans geven?

'HET IS TOCH ECHT EEN MOOI VAK. EN WE WERKEN MET BIJZONDERE LEERLINGEN. DAAR BEN IK NU WEL ACHTER.'

Open en direct

Om niet over één nacht ijs te gaan, besloot ik wat lessen te bezoeken. Ik beperkte me tot het vmbo. Enerzijds vanwege mijn werk op Cito waar ik vooral betrokken ben bij de papieren en digitale examens vmbo. Anderzijds omdat juist de gesprekken met deze leerlingen me zoveel energie gaven. Hun openheid en directheid charmeerden mij enorm. Uiteindelijk heb ik ook nog een korte stage gelopen bij X11, een vmbo-school in Utrecht. Zo kwam ik er weer een beetje in en het beviel me zo goed dat ik besloot de stap te wagen. Sinds het begin van vorig schooljaar werk ik twee dagen in de week bij het Hilfertsheem College (HC) in Hilversum. De andere twee dagen werk ik nog bij Cito. De combinatie bevalt me erg goed. Het HC heeft lesuren van één uur, waardoor de lessen die ik geef goed verdeeld kunnen worden over twee dagen. Ik geef nu les aan twee brugklassen. Een brugklas basis/kader en een brugklas kader/gt.

Samen het wiel uitvinden

Aan het begin van het jaar was het wel even slikken. Daar sta je dan! Met 22 brugklassers tegenover je. Bij een 'gewone' baan word je de eerste weken begeleid door een collega. Er is op het HC wel een coach voor nieuwe docenten, maar voor die klas sta je toch echt in je eentje. Het geluk was dat de school voor die brugklassers net zo nieuw was als voor mij, dus samen konden we het wiel uitvinden.
En hoe is het dan in vergelijking met twintig jaar geleden? Ik weet niet of het zo heel veel beter gaat dan toen, het kan zo nu en dan nog een behoorlijke chaos zijn in mijn lessen. Maar ik heb er heel veel lol in. Een groot verschil is dat ik de kinderen stuk voor stuk leuk vind. Dat zal ermee te maken hebben dat ik nu zelf kinderen in die leeftijd heb, dus ook de andere kant van het verhaal ken. Ik kan me beter in ze verplaatsen en begrijp dat het niet altijd een pretje is om een uur lang stil te zitten op je stoel.

Labels

Ik merk dat het aantal kinderen met een labeltje enorm is toegenomen. ADHD, PDD NOS, ADD, alles komt voorbij. Dat zal ook met de school te maken hebben, het HC is een school waar veel leerlingen met leerwegondersteuning zitten. Maar toch is het me een raadsel waar dat vandaan komt en waarom het zoveel vaker lijkt voor te komen dan vroeger. Er wordt gezegd dat er te snel gelabeld wordt, maar sommige leerlingen komen echt stuiterend de les binnen: MEVROUW, IK BEN MIJN PILLETJES VERGETEN!!! Zonder medicatie zijn ze bijna niet te handhaven.
Wat ik heel sneu vind om te zien, is dat veel leerlingen die binnenkomen op het vmbo een laag zelfbeeld hebben. Ze zijn dom en kunnen niet rekenen en dus zeker geen wiskunde. Gelukkig zijn de eerste hoofdstukken bij wiskunde in de methode die we gebruiken goed gekozen. We beginnen met ruimtemeetkunde, iets heel anders dan het rekenen van de basisschool. Veel plakken en knippen en dat vinden de meesten ook echt leuk om te doen. Als

ze dan ook nog eens een mooi cijfer halen voor de eerste s.o. zie je ze opbloeien: hé, wiskunde kan ik wel! En ik vind het nog leuk ook. Het is voor mij een uitdaging om dat positieve gevoel bij ze vast te houden en te zorgen dat ze niet in hun negatieve zelfbeeld wegzakken als het wat minder gaat. Complimenten werken als een tierelier. Niet alleen bij mijn leerlingen trouwens. Bij mij ook, een compliment van een leerling of een collega en ik kan er weer een paar dagen tegen.

Hebben we u volgend jaar weer?

We begonnen het schooljaar met tien nieuwe collega's. De helft is inmiddels alweer vertrokken, sommigen haakten voor de herfstvakantie al af. Het laat zien hoe zwaar het werk is. Ik had heel veel geluk dat ik in de brugklas mocht beginnen, dat had ik veel van mijn nieuwe collega's ook gegund. Het zorgde er voor mij voor dat ik op een rustige manier kon wennen aan de school, aan de regels en afspraken. Mijn leerlingen stonden niet direct al met 1-0 voor.
Zo nu en dan kom ik behoorlijk afgemat uit een les. Is het toch niet gelopen zoals ik hoopte. Zijn ze drukker dan ik wil. Komt een uitleg niet goed uit de verf. Ik heb altijd wel iets aan te merken op mijn lessen. Het grappige is dat leerlingen dat vaak heel anders zien. Ik heb wel eens gehad dat ik tijdens een les dacht, 'wat een P$%*!$)-les is dit'. Zegt op datzelfde moment een leerling: 'hebben we u volgend jaar weer? Want ik vind het zo fijn bij u in de les.' Dat helpt enorm om jezelf en je verwachtingen een stuk minder serieus te nemen. Iedereen ziet het weer anders.

Stoom afblazen

Wat ik ook ontzettend leuk vind, zijn de collega's die ik heb. Als het even niet loopt zoals je wilt, zijn er altijd nog collega's die het klappen van de zweep kennen en op zo'n moment zeggen dat je zo nu en dan gewoon een les hebt die je in de prullenbak moet gooien. Deksel erop en niet meer aan denken. Dat gebeurt iedereen zo nu en dan. Wat daarbij helpt is de vrijdagmiddagborrel, met bier en wijn in kartonnen bekertjes zodat leerlingen die nog laat op school zijn niets doorhebben. Tijdens zo'n borrel wordt flink stoom afgeblazen. Soms voelt het lesgeven als één enorme ontgroening, behoorlijk afzien. Dat schept een band. En vervolgens komen de anekdotes naar boven en wordt er enorm gelachen. Want het is toch echt een mooi vak. En we werken met bijzondere leerlingen. Daar ben ik nu wel achter.

Over de auteur

Melanie Steentjes is wiskundeleraar op het Hilfertsheem College in Hilversum en werkt bij Cito in Arnhem.
E-mail: *m.steentjes@hilfertsheem.nl*.

MEDEDELING



FINALE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Op vrijdag 15 september vindt op de Technische Universiteit Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor zijn 162 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen.
Voor docenten die meegaan naar de finale is er tijdens de wedstrijd een onderhoudende lezing.
Vanaf maandag 18 september vindt u de opgaven (en uitwerkingen) van de finale op www.wiskundeolympiade.nl.
De vijftien prijswinnaars (vijf uit elk van de drie categorieën) worden 10 november bekend gemaakt tijdens de prijsuitreiking.

NEDERLANDSE SCHOLIER WINT GOUD OP INTERNATIONALE WISKUNDE OLYMPIADE

Bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Rio de Janeiro, 16 tot 23 juli jl, heeft Gabriel Visser (19) uit Spijkenisse een gouden medaille behaald. Hij loste drie van de zes opgaven volledig op en een vierde bijna. Hiermee bemachtigde hij bij deze meest prestigieuze wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren een plek in de top 50 van de wereld. Ook de andere Nederlandse deelnemers zetten goede prestaties neer: Matthijs van der Poel (16) uit IJsselstein en Levi van de Pol (15) uit Veenendaal wonnen beiden een zilveren medaille en Ward van der Schoot (18) uit Breda behaalde brons. Voor Nils van de Berg (17) uit Oosterhout en Wietze Koops (16) uit Meppel waren er eervolle vermeldingen. Nederland eindigde daarmee als 18e van de 111 deelnemende landen. In de afgelopen 25 jaar eindigde Nederland slechts één keer eerder in de top 20.
Zie *www.wiskundeolympiade.nl*



v.l.n.r. Ward, Nils, Levi, Matthijs, Gabriel en Wietze

NIEUWE STATISTIEK IN HET CENTRAAL EXAMEN HAVO WISKUNDE A

Jos Remijn

Dit jaar was het eerste landelijke centraal examen havo wiskunde A volgens het nieuwe programma. Vooral naar de vragen bij het nieuw vormgegeven domein statistiek werd door docenten en leerlingen met spanning uitgekeken. De twee pilotexamens uit 2016 waren de enige echte oefenexamens. Jos Remijn, toetsdeskundige bij Cito, beschrijft de ontstaansgeschiedenis van het programma en de ontwikkeling van de statistiekvragen.

Voorgeschiedenis en pilotfase

De invoering van statistiek in het nieuwe programma heeft een opvallende geschiedenis. Tien jaar geleden lanceerde de vernieuwingscommissie cTWO[1] de eerste versie van het nieuwe programma. Daarin stond over statistiek te lezen: *'Het nieuwe programma beoogt een meer levendige en realistische, probleemgeoriënteerde aanpak van de statistiek in het voortgezet onderwijs. Voor de interpretatie van statistische resultaten zal onveranderd een basis in de kansrekening nodig zijn.'* Na veldraadplegingen verscheen een jaar later het concept-examenprogramma 2013 havo wiskunde A. Het programma havo wiskunde A stond toen niet heel erg in de belangstelling. Over de nieuwe aanpak van statistiek werd wel enige kritiek gehoord: 'te ambitieus'.[2]

In 2009 startte een aantal pilotscholen met het vormgeven van het nieuwe programma op basis van de in het voorjaar van 2009 gepubliceerde definitieve cTWO-voorstellen. De aanpak van statistiek werd herzien. De empirische cyclus werd als uitgangspunt gekozen. Voor het analyseren van (grote) databestanden zou gebruik gemaakt moeten worden van ICT. De nieuwe statistiek zou uitsluitend worden getoetst in het schoolexamen. De vertaling van het schetsmatige programma van de nieuwe statistiek naar de werkelijkheid in de klas en de hele ontwikkeling van de ideeën over ICT in de statistiek, kwam in handen van de pilotdocenten in samenwerking met het cTWO-projectteam. Een smalle basis, want er waren slechts vier pilotscholen betrokken. In de pilotfase verscheen lesmateriaal,[3] ontwikkeld door pilotdocenten en het cTWO-projectteam. Het werken met dit lesmateriaal voor statistiek op de pilotscholen, zorgde voor veel discussie. Er waren problemen met de ICT-ondersteuning. Welke software moest worden gebruikt om te kunnen werken met grote databestanden in de klas? Er werden keuzes gemaakt en soms werden onderdelen niet onderwezen wegens tijdnood op school. Het domein statistiek zat in het schoolexamen, dus het was geen groot probleem als onderdelen werden overgeslagen of slechts oppervlakkig werden behandeld. De constructiegroep wiskunde A bij Cito was in deze pilotfase niet betrokken bij de ontwikkelingen rondom statistiek, omdat statistiek niet op het centraal examen getoetst werd.

Definitieve nieuwe programma

In januari 2013 verscheen na drie pilotjaren het eindrapport van cTWO[4] met het definitieve examenprogramma havo wiskunde A. Het programma week af van het pilotprogramma: de nieuwe statistiek werd voor het grootste deel verplaatst naar het centraal examen. En de kansrekening was volledig verdwenen uit het programma.

Een belangrijke reden om statistiek in het centraal examen havo wiskunde A op te nemen, was de kritiek uit het veld dat het programma van het centraal examen zonder statistiek wel erg smal was. Verder waren de pilotdocenten bevreesd dat dit nieuwe domein bij de landelijke invoering in het schoolexamendeel wel eens op veel scholen gemarginaliseerd zou kunnen worden. Toch stond in het eindrapport van cTWO dat *'de uitwerking van de leerlijn statistiek in de pilot niet volledig is gelukt.'*

Er waren nog veel losse eindjes zoals *'het onderwijs en de toetsing van (elementen van) de onderzoekscyclus (opzet en uitvoering van een statistisch onderzoek of van deelstappen voor een dergelijk onderzoek) en de plaats en rol van kansrekening binnen de uitwerking van het vernieuwde domein. Kwantitatief redeneren heeft in de pilot nog te weinig aandacht gekregen.'*

Deze bedenkingen hebben niet geleid tot uitstel van de invoering van het nieuwe programma. De leiding van de resterende pilotfase ging van cTWO over naar SLO.

SLO onderschreef de mening van de pilotdocenten dat het pilotmateriaal dat onder leiding van cTWO was ontwikkeld voor de statistiek op de havo, volstrekt ontoereikend was om leerlingen op de nieuwe statistiek in het centraal examen voor te bereiden. Daarom is er door pilotdocenten, in opdracht van SLO, voorbeeldmateriaal geschreven voor statistiek op de havo dat past bij het nieuwe programma.[5]

Dit heeft geleid tot vier statistiekmodules met bijbehorende uitwerkingen.

Syllabus en voorbeeldexamenopgaven statistiek

De voorlopige syllabus voor het definitieve examenprogramma havo wiskunde A verscheen in juli 2013, nog zonder de bijlage *Voorbeeldexamenopgaven statistiek*.
Er stond wel een tiental statistiekopgaven in die door de syllabuscommissie waren gemaakt om de specificaties uit te werken. Deze opgaven waren nog niet van 'examenkwaliteit', wat wil zeggen: niet goedgekeurd door de vaststellingscommissie wiskunde A van CvTE. Maar deze statistiekopgaven maakten wel duidelijk dat de nieuwe aanpak van de statistiek, gebaseerd op de empirische cyclus, een flinke verandering betekende. Tot en met 2008 werd op het havo het vak wiskunde A1,2 geëxamineerd, waarin statistiek nog onderdeel was van het centraal examen. In figuur 1 staan twee vragen uit het centraal examen havo wiskunde A1,2 uit 2008. De nadruk lag toen vooral op het rekenen met gegevens uit statistische diagrammen. In vragen 7 en 8 werden berekeningen met de normale verdeling gevraagd, die met de GR gemakkelijk konden worden uitgevoerd. In vraag 9 werd gevraagd een boxplot te tekenen. In het nieuwe programma hoort dit type vragen bij het ICT-deel van het programma, dus in het schoolexamen. Leerlingen moeten daar leren hoe met behulp van ICT een grote dataset geanalyseerd kan worden en hoe daarbij allerlei statistische representaties gemaakt kunnen worden.
Er kwam geen nieuwe pilotfase met statistiek in het centraal examen, dus de constructiegroep havo wiskunde A bij Cito moest snel aan de slag. Ook de methodeschrijvers moesten onmiddellijk beginnen met het werk aan de vernieuwde schoolboeken.
De constructiegroep begon met het bestuderen van het cTWO-lesmateriaal en voorbeelden van statistiekopgaven uit buitenlandse examens. Er werden enkele publicaties van de Amerikaanse vereniging van wiskundeleraren[6] bestudeerd. Bij de ontwikkeling van de eerste versies van examenopgaven statistiek heeft een cTWO-lid en tevens statistiekdeskundige, advies gegeven. In de syllabus staat over de specificaties statistiek in het centraal examen te lezen: '*Zoals uit de formuleringen van de specificaties en uit de voorbeeldvragen bij dit domein blijkt, gaat het steeds om productieve vaardigheden waarbij werkwoorden horen als beoordelen, relevante informatie afleiden, een geschikte representatie kiezen, data karakteriseren, vergelijken en interpreteren. Dit is een gevolg van de samenhang met subdomein E5, dat alleen in het schoolexamen getoetst wordt.*'

Ga er in de volgende twee vragen van uit dat de scores voor elke categorie bij benadering normaal verdeeld zijn.

In de Citotoets van 2004 zaten 100 opgaven in de categorie Taal. Kim had er daarvan 73 goed. In figuur 3 staat dat haar **percentielscore** 54 is. Deze percentielscore van 54 betekent dat 54% van álle kinderen 73 opgaven of minder goed had.

Van de Citotoets van 2004 is bekend dat in de categorie Studievaardigheden het aantal goed beantwoorde opgaven gemiddeld 27,6 was met een standaardafwijking van 6,6. Anneke had in deze categorie 21 opgaven goed.

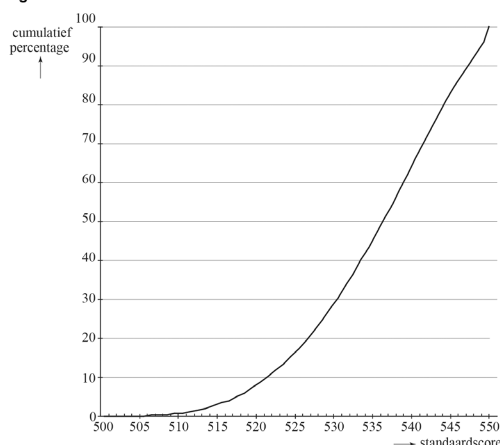
4p **7** Bereken de percentielscore van Anneke.

Kim had 48 opgaven goed in de categorie Rekenen-Wiskunde. Dat gaf een percentielscore van 59.
Voor Rekenen-Wiskunde was de standaardafwijking 8,4.

4p **8** Bereken het gemiddelde aantal goed beantwoorde opgaven bij Rekenen-Wiskunde. Rond je antwoord af op een geheel getal.

In figuur 4 zie je de cumulatieve frequentiepolygoon van de standaardscore op de Citotoets van 2004. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 4



5p **9** Teken op de uitwerkbijlage met behulp van figuur 4 een boxplot van de standaardscores op de Citotoets van 2004. Op de uitwerkbijlage staat al een schaalverdeling voor je boxplot.

figuur 1



figuur 2 Fokke en Sukke voelen dat aan hun water[7]

De opgaven moesten ook kwalitatieve vragen bevatten; 'bereken'-vragen kunnen met ICT worden aangepakt en dit gebeurt in het schoolexamen. Een uitzondering hierop vormt subdomein E4, waarin onder andere kwantitatieve uitspraken over het verschil tussen twee groepen gedaan moeten worden. Om hier meer lijn in te brengen voor de examenopgaven is door CvTE gekozen voor een lijst met vuistregels. Hierover is advies gevraagd aan meerdere deskundigen.

Dit leidde tot zeer verschillende opinies: moest er wel een dergelijke lijst komen? En er bleken in de beroepspraktijk veel verschillende regels te worden gebruikt. Uiteindelijk heeft overleg met de VvS (Vereniging voor Statistiek[8]) geleid tot het huidige formuleblad.
De voorbeeldexamenopgaven statistiek waren in de zomer van 2015 gereed. Zij werden samen met het formuleblad met vuistregels en met de formules voor betrouwbaarheidsintervallen gepubliceerd. Dit formuleblad was voor de methodeschrijvers nieuw. De vuistregels moesten nog snel worden meegenomen in de leerboeken voor de vijfde klas.
In de correctievoorschriften bij de voorbeeldexamenopgaven statistiek werden regelmatig formuleringen gebruikt als 'Voorbeeld van een juist antwoord' of 'Een juiste uitleg is bijvoorbeeld'. Weliswaar zijn dit soort formuleringen erg gebruikelijk bij de maatschappijvakken,[9] maar ze zijn erg ongebruikelijk in een examen wiskunde. Echter, meer feedback dan meldingen van enkele fouten in de uitwerkingen kwam er niet. In het voorjaar van 2017, kwamen er enkele kritische geluiden van statistici.

land	gemiddelde score	standaard-afwijking	percentiel						
			5	10	25	50	75	90	95
Australië	267,6	56,6	169,3	197,7	234,7	271,9	305,4	334,3	351,6
Canada	265,5	55,5	169,2	194,2	230,8	269,8	303,9	332,4	349,3
Finland	282,2	52,2	193,6	217,4	250,8	285,8	317,3	345,0	360,8
Frankrijk	254,2	56,2	152,1	179,7	219,9	259,2	293,9	321,5	336,5
Duitsland	271,7	53,1	179,0	201,9	238,4	275,9	309,3	335,0	350,5
Italië	247,1	50,0	161,1	182,9	215,4	249,3	281,9	309,1	324,1
Japan	288,2	44,0	212,6	231,7	260,7	290,8	318,1	341,7	355,4
Nederland	280,3	51,1	188,6	214,6	251,0	285,8	315,3	339,7	354,2
Spanje	245,8	51,3	149,1	177,8	216,3	250,3	280,9	307,4	322,3
Zweden	279,1	54,9	181,7	209,9	249,2	284,0	316,0	342,8	358,4
USA	252,8	57,0	151,7	177,9	217,1	256,1	293,1	322,7	340,0
alle deelnemers van de 23 landen	268,7	51,3	178,4	202,8	237,9	272,5	303,9	330,3	345,6

6p **7** Bepaal met behulp van het formuleblad op twee verschillende manieren of het verschil tussen de scores die behaald zijn door de Canadese deelnemers en de scores die behaald zijn door de Spaanse deelnemers groot, middelmatig of gering is.

Er zijn verschillende manieren om met behulp van de tabel de spreiding van de scores tussen landen te vergelijken.

3p **8** Kies twee verschillende spreidingsmaten en vergelijk met elk van deze maten de spreiding van de scores in Australië en Spanje.

figuur 3

Eerste pilotexamen met statistiek

De pilotscholen stemden toe om één jaar voor de rest van het land het definitieve examenprogramma in te voeren. In 2016 namen zij het eerste examen havo wiskunde A nieuw programma af. Docenten en leerlingen vonden de statistiekvragen in dit examen beslist niet eenvoudig. De gemiddelde p-waarde van de statistiekvragen was 0,33 ($n = 137$). Leerlingen hadden moeite met de formulering van de vragen. Ze moesten gegevens uit verschillende figuren combineren bij de beantwoording van de vragen. Een belangrijk probleem bij de opgave *Links naar Wikipedia-artikelen* was dat ze vaak de variabele (aantal binnenkomende links) en de frequentie (aantal artikelen) niet uit elkaar konden houden. Doordat dit allebei een aantal betrof, haalden veel leerlingen bij de beantwoording van vragen de variabele en de frequentie door elkaar.

Eerste landelijke examen met statistiek

In het examen 2017-1 besloeg de statistiekopgave *Onderzoek naar rekenvaardigheid* drie pagina's. Er waren drie figuren en een tabel in de opgave verwerkt. Voor velen onverwacht: er werd geen vraag over een betrouwbaarheidsinterval gesteld. En, zoals in de syllabus aangekondigd, waren de vragen behoorlijk kwalitatief getint.
Bij de correctie was onzekerheid over de vraag hoe moest worden omgegaan met de opmerking 'Voorbeeld van een juist antwoord'. Anders dan bij vragen waarin gerekend of getekend moet worden, is het hier niet altijd meteen duidelijk wat juist en wat onjuist is. In figuur 3 staan de vragen 7 en 8 uit dit examen.

'HET IS DUIDELIJK DAT DE VRAGEN VEEL KWALITATIEVER GESTELD WORDEN DAN IN DE VROEGERE EXAMENS HAVO WISKUNDE A1,2.'

In vraag 7 werd gevraagd om op twee manieren het verschil tussen de scores van Canada en Spanje te bepalen. In het correctievoorschrift werden twee mogelijke aanpakken gegeven, effectgrootte en boxplots. Al snel werd door docenten ook een mogelijke aanpak met het maximale verschil in cumulatief percentage (max V_{cp}) gemeld. Eveneens correct, maar wel een flinke klus voor leerlingen die hiervoor kiezen. Er kwamen mooie plaatjes van cumulatieve frequentiepolygonen op het forum van de NVvW, gemaakt met bijvoorbeeld GeoGebra. De vraag werd niet heel slecht gemaakt, de p-waarde was 0,48. Anders ging het met vraag 8. Daar werd gevraagd twee verschillende spreidingsmaten te kiezen en daarmee met de gegeven tabel de spreiding in de scores van Australië en Spanje te vergelijken. Maar liefst 65% van de leerlingen behaalde nul punten voor deze vraag. Een score die we niet hadden verwacht, aangezien in de tabel de standaardafwijking van alle landen vermeld stond en met het 75e en 25e percentiel de interkwartielafstand snel berekend kon worden.
In gesprekken met docenten werd gesuggereerd dat de leerlingen het woord 'spreiding' kennen, maar het woord 'spreidingsmaten' niet konden thuisbrengen. Het is duidelijk dat de vragen veel kwalitatiever gesteld worden dan in de vroegere examens havo wiskunde A1,2 en dat een vraag als 'Teken het boxplot van Spanje' in de nieuwe aanpak van de statistiek niet meer past in het nieuwe centraal examen.

Conclusie

De aanpak van de statistiek in het nieuwe programma sluit beter aan bij het vervolgonderwijs en bij het gebruik van statistiek in verschillende beroepspraktijken. Het vernieuwde statistiekprogramma leidt tot duidelijk andere vragen over statistiek in het centraal examen. Het is jammer dat er bij de introductie van statistiek in het centraal examen havo wiskunde A geen ruimte is geweest voor een pilotperiode. Mede hierdoor moeten alle betrokkenen nog wennen aan de nieuwe statistiek in het centraal examen havo wiskunde A.

Noten

[1] cTWO: commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs. De in dit artikel genoemde publicaties van cTWO zijn te vinden op de website *http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/*

[2] Nijdam, B. (2008). Probleemgeoriënteerde statistiek en kansrekening binnen wiskunde A/C. *Euclides, 83*(4).

[3] *http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/HAVO Wiskunde A/*

[4] cTWO (2013). *Denken & doen. Wiskunde op havo en vwo per 2015.* cTWO: Utrecht.

[5] *http://www.betanova.nl/downloads/Lesmateriaal-wiskunde-A-havo*

[6] Kader, G & Jacobbe, T., & Wilson, P. & Zbiek, R.M. (2013). *Developing Essential Understanding of Statistics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

[7] Gepubliceerd met toestemming van Bastiaan Geleijnse namens RGvT

[8] Website: *http://www.vvs-or.nl/*

[9] Bijvoorbeeld bij maatschappijleer vwo 2017-1: *http://www2.cito.nl/vo/ex2017/VW-1034-a-17-1-c.pdf*

Over de auteur

Jos Remijn is toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: *jos.remijn@cito.nl*

HAVO B-EXAMEN

Gerrie Stuurman

Het examen met het onderdeel dat de gemoederen het meest bezighield: bewijs dat *S* een top is van *f*. Maar gelukkig zijn er nog 17 andere opgaven waar Gerrie Stuurman iets over te zeggen heeft.

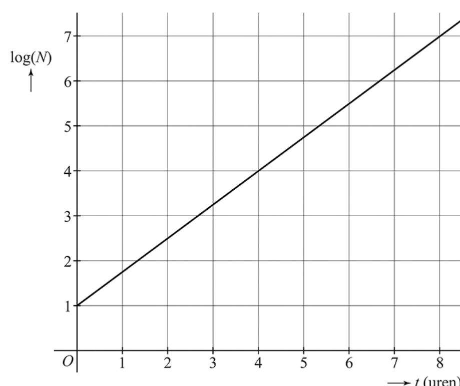
Het was de eerste keer dat de nieuwe wiskundeprogramma's voor de havo als echt examen en niet als pilotexamen werden afgenomen. Voor de docent is dat toch extra spannend vergeleken met voorgaande jaren. Vaak zeg ik bij een bepaald type vraag: 'Dit zit er elk jaar in. Dus zorg dat je het goed kunt.' Daar moest ik nu toch meer een slag om de arm houden: 'Ik verwacht dat ...' of 'Ik denk dat dit onderdeel wel in het examen zal voorkomen'. Uiteraard heb ik alle pilotexamens doorgenomen en veel geoefend met mijn leerlingen.

Starten maar

Het examen begon met twee opgaven uit het nieuwe meetkundeprogramma met de context *Cirkel en lijn*. De vraag is of dit onderdeel een goede keuze is om mee te starten. Het zijn prettige opgaven, omdat er weinig tekst in staat. De leerlingen kunnen snel aan de slag. Bij opgave 1 moet er aangetoond worden dat een lijn een cirkel raakt. Dat hebben we vaak geoefend. En bij de tweede opgave moet onderzocht worden of twee lijnen elkaar al dan niet loodrecht snijden. De vergelijking van de tweede lijn moet daarvoor eerst opgesteld worden. De percentiel scores voor deze opgaven waren respectievelijk 0,68 en 0,91 bij mijn leerlingen. Dus daarmee is de vraag of het goede startvragen waren voor het examen positief beantwoord.

Experimenteren

De tweede context *Experimenteren met bacteriën* bestaat uit drie opgaven waarbij de kennis van exponentiële en logaritmische functies en het werken met een log-schaal op de verticale as wordt getoetst, zie figuur 1. Het werken met grafieken met een enkele of dubbele log-schaal staat op mijn lijstje met onderwerpen voor de examentraining in mijn lessen. Achtereenvolgens moeten er een groeifactor en een verdubbelingstijd worden berekend en daarna een exponentiële vergelijking worden opgelost. Bij het berekenen van de groeifactor bij opgave 4 zit de moeilijkheid in het gebruik van de log-schaal op de verticale as. Bij opgave 5 is er wat meer tekst. Maar, zoals heel vaak bij wiskunde B-examens, als je de opgave rustig doorleest, dan komt daar ergens een vergelijking uit rollen en blijkt het uiteindelijke rekenwerk reuze mee te vallen.



In figuur 1 is af te lezen dat aan het begin van het experiment geldt dat $\log(N)=1$ en dat na 8 uur geldt dat $\log(N)=7$.

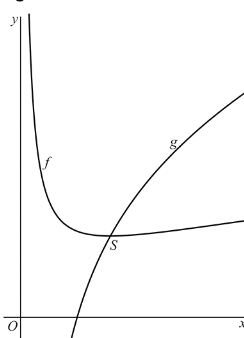
figuur 1

Bewijzen ... of niet

Twee functies met een wortel

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ en $g(x)=3\sqrt{x}-\frac{3}{x}$.
Het punt S is het snijpunt van de grafieken van f en g. Zie de figuur.

figuur



De grafiek van f heeft één top. Dit blijkt punt S te zijn.

8p **6** Bewijs dat S een top is van de grafiek van f.

figuur 2

De derde context heeft als titel *Twee functies met een wortel*. Ik denk dat de titel *Twee functies met een angel* beter op zijn plaats was geweest, zie figuur 2. Er is veel geschreven over deze opgave, zowel in de *WiskundE-brief* als op het forum van de NVvW. Dat ging niet eens zozeer over de opgave zelf, maar het had te maken met de term 'bewijs'. Deze term staat voor havo wiskunde B op de lijst met examenwerkwoorden. Deze werkwoorden deel ik altijd uit op papier. Ik bespreek de termen en ik laat als opdracht de leerlingen naar examenopgaven zoeken waarin deze termen voorkomen. Voor het werkwoord 'bewijzen' waren deze opgaven niet te vinden in de pilotexamens. Dan verwacht je dat het niet in een examen voor zal komen. Dus wel. Slechts twee van mijn leerlingen wisten meer dan twee punten te halen voor deze achtpuntsvraag. Het gros bleef steken op nul of twee punten. Aan de uitwerkingen van de leerlingen kan ik zien dat ze heel goed op een rij hadden welke stappen er gezet moesten worden. Maar ... de meeste leerlingen hadden voor het oplossen hun rekenmachine gebruikt. En dat mag niet. Heel erg jammer! Ik denk dat deze opgave één van de redenen voor de relatief hoge N-term (1,8) is. Op het examenforum wordt er over alle vragen van gedachten gewisseld en gediscussieerd. Het aantal bezoekers en het aantal reacties was bij vraag 6 erg hoog. Deze vraag had van alle vragen op het hele examenforum het hoogste aantal bezoekers. Het nodigde mij uit om even te gaan rekenen. Ik heb hiervoor op het havo wiskunde B-forum alleen gekeken naar de onderwerpen die met een vraag uit het examen te maken hadden. Dus onderwerpen zoals 'algemene indruk examen' heb ik niet meegenomen. Het gemiddelde aantal bezoekers was 516 keer per onderdeel en het gemiddelde aantal reacties was 22. Bij vraag 6 waren de aantallen ruim 1500 en 89 respectievelijk. Het moge duidelijk zijn. Als de examenmakers bij wiskunde A nog een context zoeken om wat statistiekvragen over te stellen, dan zou dit een aardige context zijn. Het is maar een ideetje.

Sportief

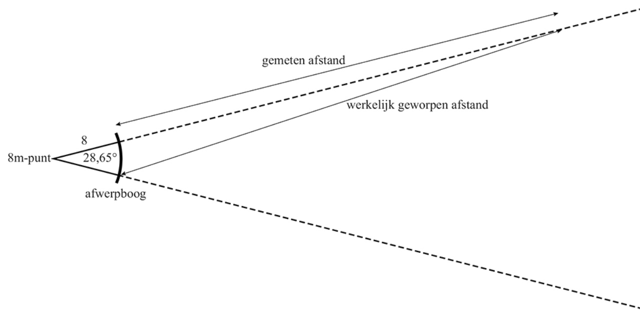
Bij de context *Speerwerpen* moeten leerlingen aan de slag met een aantal formules met in totaal vier variabelen en parameters. De baan van een speer is een deel van een parabool. Zowel de hoogte *h* als de horizontale afstand *d* zijn afhankelijk van de tijd *t* en de parameter *b*, die de beginsnelheid van de speer aangeeft. Bij opgave 7 wordt de snelheid gegeven en moet er berekend worden hoe ver de speer gegooid wordt. Daarvoor moet er wel bedacht worden dat de vergelijking $h = 0$ naar de oplossing leidt. Bij opgave 8 moeten twee formules herleid worden tot één nieuwe formule. Bij opgave 9 moet de maximale hoogte van de speer algebraïsch worden bepaald. Tot zover gaat deze context wel goed. Maar dan de laatste opgave! Er is redelijk wat tekst nodig om deze opgave goed neer te zetten. Er staat ook een mooie afbeelding bij de opgave, zie figuur 3. De bedoeling is dat leerlingen zien dat ze met de cosinusregel een gevraagde afstand kunnen uitrekenen. Een deel van mijn leerlingen is bij voorbaat al afgehaakt en probeert niet eens wat. Een ander deel probeert nog ergens rechthoekige driehoeken te creëren of denkt met de sinusregel iets te kunnen doen. Deze vraag was na opgave 6 de slechtst gemaakte vraag van het examen bij mijn leerlingen. Ik vraag me dan af wat de oorzaak is. Zijn leerlingen toch niet bedreven genoeg in het herkennen van situaties wanneer ze een sinus- of cosinusregel kunnen gebruiken? Of zien ze door de 'tekst'-bomen het 'meetkunde'-bos niet meer?
Het onderwerp sport komt volgens mij niet zo vaak voor in wiskunde B-examens. Bij wiskunde A wel. Ik ben even terug gaan bladeren. Zo kwam ik bij havo wiskunde A *Hardlopen* (2016-I) en *Kunstrijden op de schaats* (2014 II) tegen. En bij vwo wiskunde A *De zevenkamp* (2013-I), *Voetbal* (2014-I) en *De triathlon* (2016-I). Bij vwo

Een atleet gooit de speer vanaf de **afwerpboog**. Dit is een deel van de cirkel met het zogeheten 8m-punt als middelpunt en een straal van 8 meter. De speer moet landen in het gebied binnen twee lijnen die een hoek van 28,65° met elkaar maken. Deze twee lijnen snijden elkaar in het 8m-punt.

De **gemeten afstand** wordt als volgt gemeten:
– trek een rechte lijn vanaf de plek waar de speer landt tot het 8m-punt;
– de lengte van het deel van deze lijn van de plek waar de speer landt tot de afwerpboog, is de gemeten afstand.

Door deze manier van meten kan het voorkomen dat er een verschil is tussen de werkelijk geworpen afstand en de gemeten afstand.
In de figuur staat hiervan een bovenaanzicht.

figuur



figuur 3

wiskunde B dacht ik even ook een sportcontext gevonden te hebben. Mijn oog viel op het woord *kogel*. Dat bleek echter niets met kogelstoten te maken te hebben, maar met oorlog voeren.

Exact

In de context *Gebroken functies* kunnen leerlingen hun algebraïsche vaardigheden laten zien. De opgaven zijn redelijk pittig, maar wel van een mooi niveau! Er is een kettingregel nodig om te differentiëren. En de leerlingen moeten een goniometrische vergelijking oplossen die er anders dan standaard uitziet: $\frac{1}{2\sin(x)+3}=\frac{1}{4}$.

Bij opgave 12 wordt er gevraagd naar de afstand van een punt tot een lijn. Er zijn collega's in het land die hun leerlingen de formule hebben geleerd waarmee het antwoord op de vraag direct uit te rekenen is. Daar is eerder over geschreven in de *WiskundE-brief* (760). Ik ben zelf voorstander van de methode waarbij leerlingen zien wat ze aan het doen zijn en daardoor ook begrijpen waar bepaalde wiskunde voor nodig is. Ik gebruik in de klas de methode met een loodlijn op de gegeven lijn door het punt buiten de lijn, snijpunt bepalen en afstand berekenen. Inderdaad, dit is wat meer werk voor de leerlingen. Ik heb trouwens wel gemerkt dat dit onderdeel nog niet zo goed gaat. Doe ik mijn leerlingen dan toch tekort? Een aandachtspunt voor komend schooljaar.

Water koken in de bergen

De één-na-laatste context *Kookpunt van water* gaat over het feit dat water bij een lagere temperatuur kookt als de luchtdruk lager is. Ook hier weer een assenstelsel met een log-schaal op de verticale as. Bij opgave 14 moeten leerlingen een antwoord uit een bijgeleverde grafiek aflezen. De afleesmarge is nogal klein. Een aantal van mijn leerlingen hebben hun geodriehoek net niet helemaal recht gelegd en komen op een antwoord buiten de afleesmarge. Verder vind ik de opgaven bij deze context van prima niveau.

Tot slot

Bij de laatste context *Derdemachtswortel* worden er weer algebraïsche vaardigheden getoetst. Bij opgave 17 moeten snijpunten van de grafiek van de functie met een derdemachtswortel met de *X*-as en *Y*-as worden berekend en vervolgens de richtingscoëfficiënt van de lijn door deze twee snijpunten. Mijn leerlingen scoren heel netjes voor deze vraag, ook al is het de één-na-laatste vraag van het examen. Bij de laatste opgave van het examen, opgave 18, komt eindelijk het begrip raaklijn in een analytische context voor. De kettingregel is weer nodig om te kunnen differentiëren en de tijd is bijna om. Toch scoren bijna al mijn leerlingen nog een aantal punten op deze vraag.

Conclusies

Het examen sloot goed aan bij het programma. Ik heb het idee dat ik mijn leerlingen goed heb kunnen voorbereiden op dit examen. Het schoolexamencijfer en het eindexamencijfer verschilden maar 0,1. Dat is een goed teken.
Ik vond de lengte in orde. Zwakkere leerlingen komen niet allemaal tot het eind van het examen, maar dat is begrijpelijk. Het was een mooi, gevarieerd examen. Er zat van alles wat in. Je kunt je afvragen of twee keer een grafiek met een log-schaal op de verticale as dubbelop is. Dat is misschien zo, maar dat is nog wel te overzien. De hoeveelheid en moeilijkheidsgraad van de opgaven waar gedifferentieerd moest worden, was prima. Bij twee opgaven ging het om machtsfuncties en bij twee opgaven was de kettingregel nodig. De term 'bewijs' zullen we nooit meer vergeten, denk ik. Ik vertel mijn leerlingen altijd dat ze er op moeten rekenen dat ze al hun tijd nodig hebben bij hun wiskunde-examen en dat ze waarschijnlijk na afloop het idee zullen hebben dat het niet zo goed is gegaan. Maar uiteindelijk blijkt dat altijd mee te vallen en komen ze er met een cijfer in de buurt van hun schoolexamencijfer uit. En zo ook nu! Bij de landelijk poll van *scholieren.com* zijn de meningen verdeeld over dit examen: bij 28% ging het heel slecht, bij 21% niet zo goed, bij 24 % ging het gewoon en bij 27% ging het goed tot heel goed. Ik denk dat met die N-term van 1,8 velen nog een goed resultaat hebben behaald.

Komend schooljaar kan ik in ieder geval weer vaker zeggen: 'Ik weet bijna zeker dat dit onderdeel in het examen zal komen.' Ik kan weer een jaar aan de slag!

Over de auteur

Gerrie Stuurman is docente wiskunde op SG Huizermaat te Huizen. E-mailadres: *gstuurman@gsf.nl*

VWO A- EXAMEN

Marcel Daems

Marcel Daems was lid van de Alympiade commissie en heeft bijgedragen aan het ontwerpen van de opdrachten. Mede daarom vroeg de redactie hem om zijn licht te laten schijnen op het wiskunde A-examen. 'Goed te doen' constateert hij en de N-term van 0,6 weerspreekt die conclusie niet.

Maandagmiddag 15 mei 2017

In de examenzaal zitten alle leerlingen muisstil en ogenschijnlijk ontspannen te wachten op het werk dat uitgedeeld wordt. Tijdens het uitdelen wens ik ze veel succes en zeg erbij dat ik er alle vertrouwen in heb en dat ze het zeker weten kunnen.
Natuurlijk zijn ze gespannen, maar dat laten ze niet blijken. Waarschijnlijk staan ze er niet bij stil dat ik ook gespannen ben. En dat laat ik ook niet blijken. Iedere keer vraag ik me af hoe het examen eruit zal zien, of het goed past bij de stof waar de afgelopen drie jaar aan gewerkt is. Zitten er moeilijke vragen tussen en vooral wat kom je als docent tegen bij het nakijken? Nog even wachten en dan klinkt het: 'Jullie mogen beginnen, succes!'
Dan heb ik de eerste gelegenheid het examen vluchtig te bekijken. In de eerste opgaven valt me niets vreemds op, het lijkt wat recht-toe-recht-aan werk. De tweede set bevat diagrammen. Daar kunnen listige vragen over gesteld worden. Daarna volgen opgaven met exponenten en logaritmen. Natuurlijk, dat hoort erbij. Vervolgens zijn er opgaven met de normale verdeling en een grillige grafiek. De laatste opgaven gaan over een formule behorend bij een model over tijd en afstand. Mijn eerste indruk is dat het te doen moet zijn, maar dat heb ik wel vaker gehad en daar heb ik me ook weleens in vergist. Wat me verder opvalt is dat er nauwelijks kansrekening in zit. Zou dit te maken hebben met het nieuwe programma? Ik leg het werk neer en concentreer me op de surveillance. Na afloop van het examen kan ik zelf aan de opgaven beginnen om een beter oordeel te vormen.

Zonnepanelen

De eerste vier opgaven gaan over een actueel onderwerp, namelijk over de aanschaf van zonnepanelen en de terugverdientijd daarvan, startend met een vraag over de verdubbelingstijd. De elektriciteitsprijs stijgt met 5% en de leerlingen moeten uitrekenen hoeveel jaar het duurt eer dat deze verdubbeld is. Het komt neer op het oplossen van de vergelijking: $1{,}05^t = 2$. En de oplossing is dan $t = 14{,}20669...$
Het antwoord 14 jaar zou fout zijn, want dan is het nog net niet verdubbeld. Het correctievoorschrift staat het antwoord 14 wel toe. Dat is mooi voor de leerlingen: deze eerste verkeerde afronding wordt niet aangerekend. De volgende drie opgaven gaan over de terugverdientijd. Er komt een opgave met subsidie aan de orde, zie figuur 1. Jammer dat nergens uitgelegd wordt wat met de subsidie bedoeld wordt of gedaan moet worden. Niet voor iedereen blijkt dit algemene kennis te zijn. Er zijn leerlingen die 15% van €6299 uitrekenen, vervolgens concluderen dat dit meer is dan €650, en dan €650 bij de prijs optellen. Het is een wiskunde-examen en geen examen M&O.

tabel

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie[2)] van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

noot 2 In 2013 werd er door de overheid subsidie verstrekt bij het aanschaffen van zonnepanelen.

figuur 1

De laatste opgave over zonnepanelen is een mooie wiskunde A-opgave waarbij de leerling met de afgeleide moet laten zien dat de terugverdientijd daalt als de aanschaf van zonnepanelen stijgt. Gegeven is:

$T = \dfrac{1300+325x}{46{,}9x}$. Hierin staat T voor de terugverdientijd en x voor het aantal panelen.
Om dit te doen moeten verschillende stappen uitgevoerd worden: de quotiëntregel toepassen en twee lineaire functies differentiëren. In het antwoordmodel zie ik dat met het opstellen van de afgeleide twee punten te verdienen zijn, zie figuur 2.

- $$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{325 \cdot 46{,}9x - (1300+325x)\cdot 46{,}9}{(46{,}9x)^2}$$ 2

figuur 2

En dat brengt natuurlijk de ieder jaar terugkerende discussie over de ondeelbaarheid van de punten met zich mee.

De centrale vergadering zegt dat in dit geval het een kwestie van goed of fout is, zie figuur 3.

Vr. 4	Geen afgeleide : geen ptn; dy/dx met de GR is geen afgeleide Eerste bolletje: goed of fout ; 2 ptn ondeelbaar (behoudens rekenfouten)

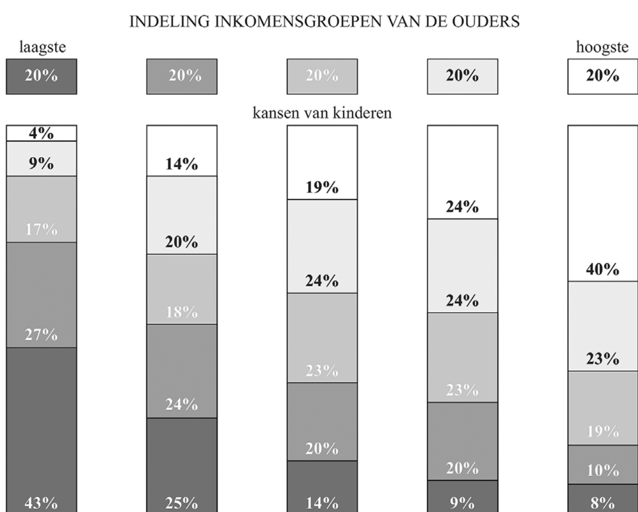
figuur 3

Het is weliswaar standaardwerk, maar er kan al gauw iets fout gaan bij het gebruik van de quotiëntregel. De opmerking 'behoudens rekenfouten' is merkwaardig. De leerling hoeft nu nog niets te berekenen. Of is dit de deur op een kier zetten, omdat de ondeelbaarheid toch iets onredelijks bevat? In de regels in het CV en in de september- en maart-mededeling kan ik niets vinden over deze ondeelbaarheid. In het verslag van de centrale vergadering wordt bij vraag 8, waar ook 2 punten te verdienen zijn, over de ondeelbaarheid van de punten niets gezegd. Het zou goed zijn als een volgende keer de centrale vergadering aangeeft op welke grond de punten ondeelbaar zijn.

'WAT ME OPVALT IS DAT ER NAUWELIJKS KANSREKENING IN ZIT.'

Sociale ladder

Beschrijvende statistiek met kansrekening en hypothesetoetsen. Het gaat over de inkomensverdeling in de Verenigde Staten, zie figuur 4. Met de tweede zin heb ik enigszins moeite: *'In dit artikel wordt een model beschreven waarin per inkomensklasse wordt aangegeven hoe groot de kans is dat je, als je geboren bent in een gezin in die inkomensklasse, zelf terechtkomt in een bepaalde inkomensklasse.'* Het gaat me om het gebruik



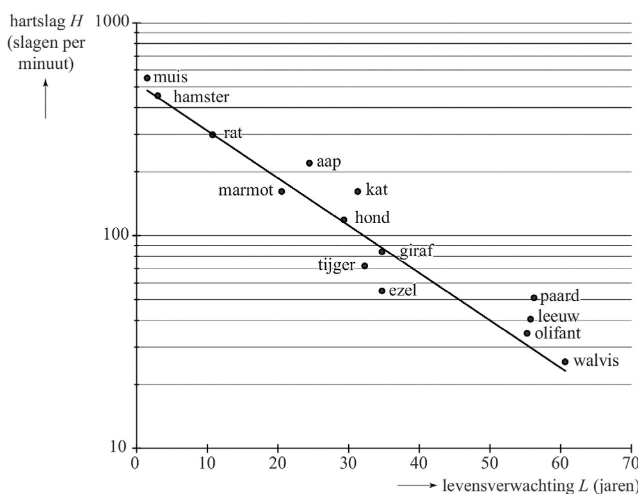
figuur 4

van het begrip 'kans' in deze zin. De klasse waarin iemand geboren wordt, is voor de geborene bepaald door het toeval, hoewel dat in dit geval letterlijk belichaamd wordt door de ouders. Maar iemand heeft wel invloed op zijn of haar eigen toekomst en dus waar hij of zij in terechtkomt.

En onder de figuur met de indeling van inkomens van ouders staat: *'Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat van de kinderen met ouders in de laagste inkomensklasse 4% in de hoogste inkomensklasse terecht zal komen.'* De tabel gaat uit van kansen maar hier spreekt de opgave over een zeker resultaat. Een toevoeging als '*naar verwachting*' zou dus passen. Het vervolg is de zin: '*Dus: als je in de laagste inkomensklasse geboren wordt heb je 4% kans om zelf in de hoogste inkomensklasse terecht te komen.'* Nu is de zekerheid weer weg. Hier wordt het begrip kans slordig gebruikt. Om bij opgave 6 en verder toch met kansrekening aan de slag te kunnen gaan, zou de volgende toevoeging voldoende zijn: *We gaan er vanaf nu vanuit dat de plek op de sociale ladder volledig door toeval bepaald wordt.*

Eén miljard hartslagen

Een set opgaven over het verband tussen de levensverwachting van een zoogdier en het aantal hartslagen van dat dier. Ik vraag me af of de gegevens in de grafiek wel realistisch zijn. De levensverwachting van een kat en hond is ongeveer 30 jaar. Die van een paard zelfs 55. Dat is onwaarschijnlijk hoog, zie figuur 5.

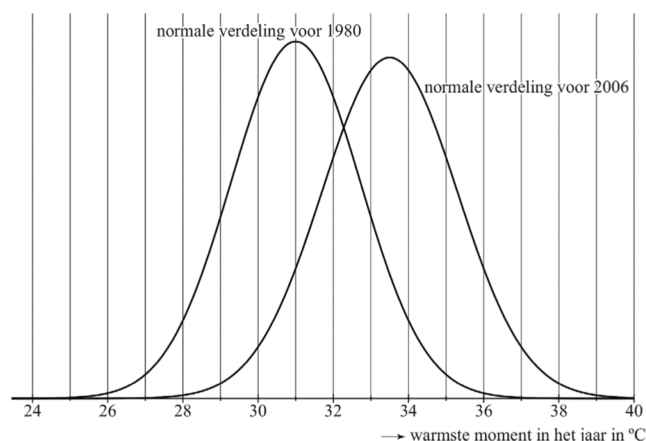


figuur 5

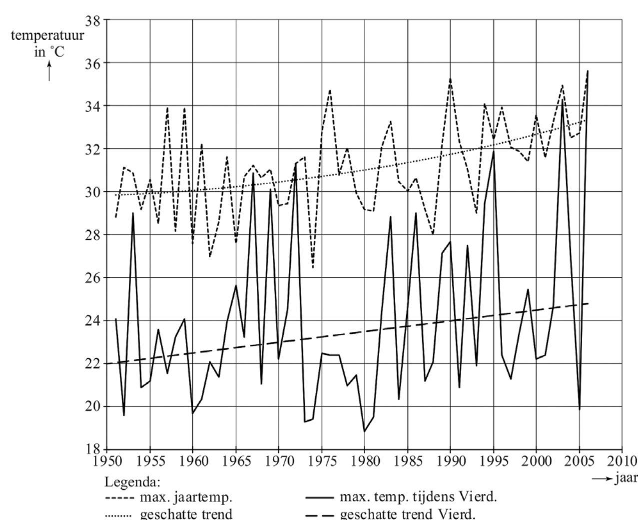
Verschillende soorten verbanden komen aan de orde: een omgekeerd evenredig verband $H = \frac{1900}{L}$, een exponentieel verband $H = b \cdot g^t$ en een logaritmisch verband $L = a \cdot \log(H) + b$. Bovendien moet er ook nog rekening gehouden worden met de eenheden. De hartslagen zijn gegeven in minuten, de levensverwachting in jaren. De opzet is prima om algebraïsche vaardigheden te toetsen.

Vierdaagse van Nijmegen

Twee grafieken, over de hoogste temperatuur in een jaar, springen meteen in het oog. De eerste figuur geeft kansmodellen weer, zie figuur 6, en de tweede de werkelijk gemeten temperaturen, zie figuur 7. Van die laatste gaat wel een schrikeffect uit: vier verschillende grafieken in één figuur, waarvan twee flink schommelen.



figuur 6



figuur 7

De opgaven bij *De vierdaagse van Nijmegen* zijn zeer goed te doen en ik verwacht hier weinig problemen tegen te komen.

Formule van Riegel en kilometertijden

Als de tijd van een hardloper bij een bepaalde afstand bekend is, dan kan met de volgende formule de tijd berekend worden op een andere afstand: $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1{,}07}$.

De tijden T_1 en T_2 (in seconden) horen bij de respectievelijke afstanden d_1 en d_2, waarbij de afstanden eenheidsonafhankelijk zijn, mits d_1 en d_2 wel dezelfde eenheid hebben. Opgaven 17, 19 en 20 zouden zo uit de schoolboeken gehaald kunnen zijn. Vul gegevens in en bereken een nieuwe waarde, combineer twee formules tot een nieuwe formule en beredeneer het verloop van een grootheid met behulp van de afgeleide. Opgave 18 valt op, zie figuur 8. Hier moet een vast percentage berekend worden zonder dat gegevens beschikbaar zijn.

Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Dat is ook in overeenstemming met de formule: als de afstand tweemaal zo groot wordt, dan geldt volgens de formule van Riegel dat de gemiddelde snelheid altijd met hetzelfde percentage afneemt.

5p **18** Bereken dit percentage.

figuur 8

Voor menig leerling staat gelukkig het woordje 'altijd' in de tekst zodat de berekening wel met een getallenvoorbeeld gedaan kan worden. De waardering voor deze opgave is 5 punten. Dat is veel als een combinatie van getallen volstaat om dit percentage te berekenen. Dat deze opgave met een getallenvoorbeeld opgelost mag worden, kan verwarrend zijn voor toekomstige leerlingen. Zij zullen de komende jaren trainen met oude examens en zien dat bij deze vraag met een getallenvoorbeeld gewerkt mag worden. Een opgave als *Toon aan dat het om een vast percentage gaat en bereken dit percentage* waarbij alleen methode 2 uit het CV gebruikt mag worden, heeft mijn voorkeur.

Tot slot

Afsluitend wil ik zeggen dat ik wederom onder de indruk ben van de creativiteit waarmee praktische problemen omgezet worden tot opdrachten. Uit ervaring weet ik dat de ontwikkeling van een goede opdracht veel werk met zich meebrengt en een gecompliceerde klus is. Voor de makers van een examen zal het, vermoed ik, niet anders zijn. Ondanks de kanttekeningen en kritische noten vind ik dit examen goed te doen en, op de beperkte hoeveelheid kansrekening na, voldoende evenwichtig.

Over de auteur

Marcel Daems is docent wiskunde aan het Montaigne Lyceum in Den Haag en is enkele jaren lid geweest van de Wiskunde Alympiade Commissie. Met ingang van het schooljaar 2017-2018 is hij verbonden aan Gymnasium Sorghvliet in Den Haag.
E-mail: *marcel.daems@tiscali.nl*

Een krachtige leerling begint bij een krachtige leraar

Bouw jij mee aan het lerarenregister?

Dat kan!



Doe mee

In meedenksessies vanaf april 2017



Gebruik je zeggenschap

- Regel dit voor 1 augustus 2017
- Stem van 4 t/m 24 september 2017



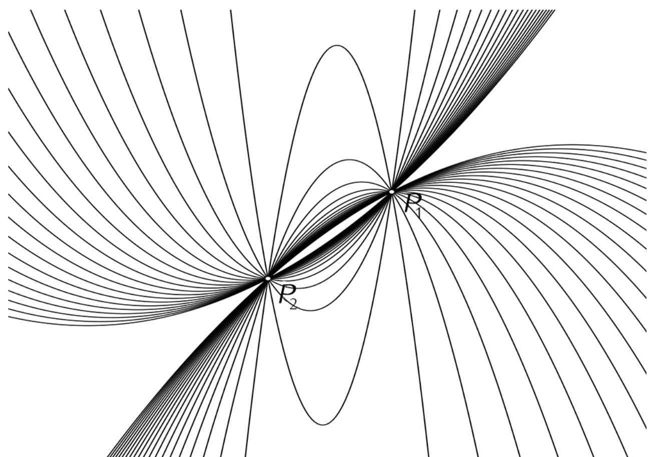
Meer weten over de wet Beroep Leraar en Lerarenregister?
Kijk dan op: **registerleraar.onderwijscooperatie.nl**

PARABOLENPARADE

Jos de Wit
Jan van de Craats

Er gaan oneindig veel grafieken van kwadratische functies door twee punten die niet verticaal boven elkaar liggen. Maar wat kun je dan zeggen over de toppen? Jos de Wit en Jan van de Craats zochten het uit en het probleem blijkt opgelost te kunnen worden met vwo wiskunde B-stof. Uw leerlingen kunnen het dus ook ...

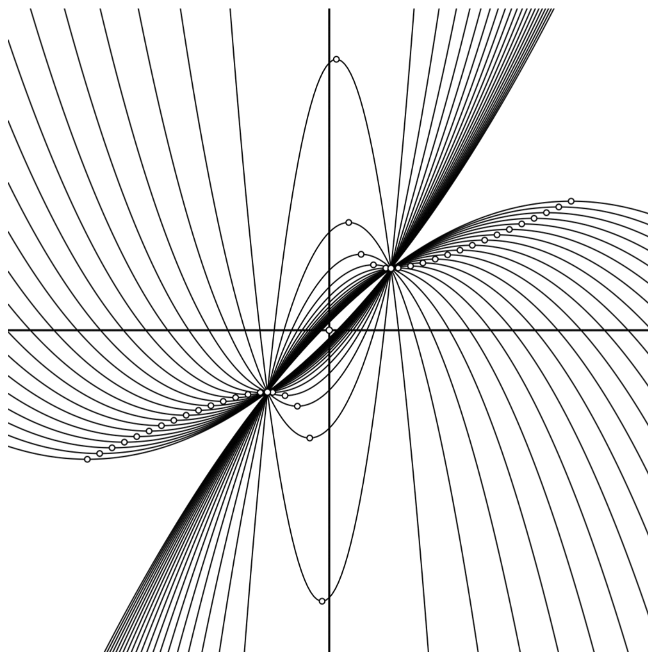
De grafiek van een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool met een verticale symmetrieas. De constanten a, b en c liggen vast zodra je in drie verschillende punten x_1, x_2 en x_3 de functiewaarden $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ en $f(x_3) = y_3$ geeft: je kunt a, b en c dan oplossen uit het stelsel van drie vergelijkingen $ax_i^2 + bx_i + c = y_i$ ($i = 1, 2, 3$). Schrijf je slechts twee functiewaarden $f(x_1) = y_1$ en $f(x_2) = y_2$ voor, dan zijn er oneindig veel kwadratische functies $f(x)$ die voldoen. In meetkundige termen: er zijn dan oneindig veel parabolen met een verticale as waarvan de grafiek door de punten $P_1 = (x_1, y_1)$ en $P_2 = (x_2, y_2)$ gaat. Figuur 1 geeft een impressie.



figuur 1 Parabolen door twee punten

Als de twee gegeven punten op dezelfde hoogte liggen, dus als $y_1 = y_2$, dan is het plaatje niet erg interessant: alle toppen van de parabolen liggen netjes onder elkaar op de middelloodlijn van P_1P_2. Maar als dat niet het geval is, zoals in figuur 1, dan liggen die toppen niet zo netjes. In elk geval liggen ze niet op een rechte lijn. Hoe dan wel? Dat gaan we uitzoeken; alles wat daarvoor nodig is, is vwo-stof wiskunde B.

We gaan dus uit van twee punten P_1 en P_2 in het vlak, niet op één verticale of één horizontale lijn, en proberen de verzameling te bepalen van alle toppen van parabolen met een verticale as die door P_1 en P_2 gaan. Omdat daarbij wat rekenwerk te pas zal komen, kiezen we het coördinatenstelsel zo handig mogelijk. Om te beginnen nemen we het midden van het lijnstuk P_1P_2 als oorsprong. Verder passen we de schaalverdelingen op de x-as en de y-as zó aan, dat de coördinaten van P_1 en P_2 gegeven worden door respectievelijk (1, 1) en (-1, -1). Zie figuur 2,

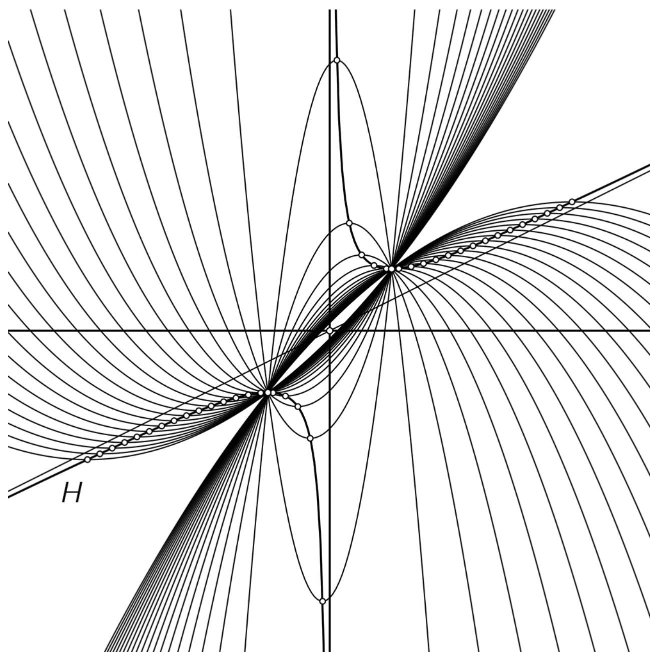


figuur 2 Parabolen met toppen in het aangepaste coördinatenstelsel

waarin ook de toppen van de parabolen zijn aangegeven. Als zo'n parabool de grafiek is van de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan moet, omdat (1, 1) en (-1, -1) op de parabool liggen, gelden dat $a + b + c = 1$ en $a - b + c = -1$. Optellen van de beide vergelijkingen geeft $2a + 2c = 0$, dus $c = -a$. Aftrekken van de beide vergelijkingen geeft $2b = 2$, dus $b = 1$. Zo'n parabool wordt dus gegeven door de vergelijking $y = ax^2 + x - a$. Voor de x-waarde x_t van de top vinden we via kwadraat afsplitsen of door te differentiëren: $x_t = \frac{-1}{2a}$ en dan is de y-waarde y_t dus gelijk aan $y_t = \frac{-1}{4a} - a$.

Met a als parameter geeft dit een parametervoorstelling voor de kromme H die alle toppen bevat. Als we nu x en y schrijven in plaats van x_t en y_t, kunnen we de parameter a elimineren en op die manier een vergelijking in x en y krijgen voor H. Dat gaat als volgt: omdat $x=\frac{-1}{2a}$ is, geldt $a=\frac{-1}{2x}$, dus $y=\frac{-1}{4a}-a=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$.

Deze kromme H heeft de y-as als verticale asymptoot en de lijn $y=\frac{x}{2}$ als scheve asymptoot. Verder gaat H door de punten $P_1=(1, 1)$ en $P_2=(-1, -1)$ voor respectievelijk de parameterwaarden $a=\frac{-1}{2}$ en $a=\frac{1}{2}$. Dat zijn tevens de punten waar H een horizontale raaklijn heeft. In figuur 3 zijn de parabolen met hun toppen, de kromme H en de scheve asymptoot getekend.



figuur 3 Parabolen met toppen, de hyperbool H en de scheve asymptoot

Er kan nog worden opgemerkt dat H een kegelsnede is. Dat zie je direct als je de vergelijking voor H schrijft als $H: 2xy - x^2 = 1$.
Omdat H twee asymptoten heeft, is het een hyperbool. De asymptoten vormen de oplossingsverzameling van de vergelijking $2xy - x^2 = 0$.

Naschrift: door de speciale keuze van het coördinatenstelsel konden we het rekenwerk sterk beperken. Zouden we direct in coördinaten zijn gaan rekenen met bijvoorbeeld $P_1=(p_1, q_1)$ en $P_2=(p_2, q_2)$, dan zouden we heel wat meer moeite met onze formules hebben gehad. De les is dus: éérst nadenken, vereenvoudigen, symmetrie zoeken, variabelen geschikt schalen, voordat je met het eigenlijke werk begint. Meetkunde met coördinaten is prachtig maar, zoals altijd: bezint eer gij begint te rekenen!

Over de auteurs

Ir. Jos de Wit was tijdens zijn studie civiele techniek aan de TU Delft ook docent wiskunde aan een mavo in Rotterdam. Na zijn afstuderen werkte hij enige jaren bij een aannemersbedrijf in het buitenland. Daarna volgde een periode als universitair docent mechanica aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda, waar hij heeft samengewerkt met de tweede auteur van dit artikel.
E-mailadres: *josdewit47@gmail.com*
Prof. dr. Jan van de Craats is emeritus hoogleraar wiskunde aan de KMA te Breda en de Universiteit van Amsterdam. E-mailadres: *J.vandeCraats@uva.nl*

VWO WISKUNDE-B EXAMEN

Gerardo Soto y Koelemeijer

Vorig jaar had het vwo wiskunde B-examen een N-term van 2,0. Dit jaar was dat 1,5. Zou het dan weer zo'n lastig examen geweest zijn? Gerardo Soto y Koelemeijer analyseert de opgaven van het examen en komt tot een opvallende conclusie.

Na het drama van vorig jaar, waarbij een N-term van N = 2,0 werd gehanteerd, is er dit jaar bewust voor gekozen een korter examen te maken. Waren er vorig jaar nog 77 punten te verdelen over 17 vragen, dit jaar waren er 69 punten te halen voor 14 vragen. Leerlingen hadden duidelijk meer tijd om de opgaven te maken. Er werd door leerlingen ook relatief weinig geklaagd: slechts 400 keer. Vaak ging dit over het feit dat het examen relatief veel goniometrie bevatte.

Binnenkomer

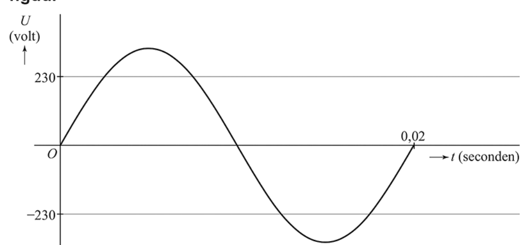
De eerste vraag ging over rakende grafieken: $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2$. De vraag was om met een exacte berekening te laten zien of de grafieken van f en g elkaar raken. Op zich standaardwerk, zeker omdat de voorwaarde $f'(x) = g'(x)$ goed uitkomt en de afgeleiden zelf ook vrij standaard zijn. De eerste vergelijking, $f(x) = g(x)$, levert echter voor sommige leerlingen een schrikreactie op, omdat dit geen standaardvergelijking is en er toch om een exacte berekening wordt gevraagd. Wie de standaardregels volgt komt vrij makkelijk tot het goede antwoord. Het is opletten omdat uit $f'(x) = g'(x)$ volgt dat $x^2 = e$ en deze x^2 ook in $g(x)$ zelf zit. Sommige leerlingen substitueren e voor x^2 in de vergelijking $f(x) = g(x)$ met als gevolg dat ze de mogelijke oplossing $x = -\sqrt{e}$ geheel over het hoofd zien. Ook hebben sommige leerlingen toch niet helemaal door dat de e een constante is. Relatief scoren leerlingen hier vrij laag, wat betekent dat dit geen fijne binnenkomer is. De tweede opgave gaat over elektrische spanning, zie figuur 1. Bij dit soort natuurkundige vragen houd ik mijn hart vast. Eerlijk gezegd vind ik niet dat dit soort contexten thuishoren op een wiskunde-examen. De vraag is ook wat je wilt testen. Contexten in de les zijn natuurlijk prima, al zijn er maar weinig docenten die er werkelijk bij stil staan. Heeft kennis van de natuurkunde bij deze vraag nu wel of geen meerwaarde? Ik zou het niet weten. Wat ik hinderlijk vind is dat er met behulp van een voetnoot een nieuw begrip wordt geïntroduceerd. Bovendien snap ik na het lezen van de voetnoot nog steeds niet wat de effectieve waarde is. Er wordt namelijk van uitgegaan dat de leerling weet wat gelijkspanning is. Vraag 2 gaat over snijpunten van een sinusoïde met een horizontale lijn. Dat er uiteindelijk om procenten wordt gevraagd voegt niet veel toe. Deze vraag mag met de grafische rekenmachine worden opgelost en zorgt niet voor veel problemen. Beter was dit niet gevraagd. Vraag 3 gaat over de integraal

$$T \cdot U_{\text{eff}}^2 = \int_0^T (U(t))^2 \, dt \text{ waarbij } U(t) = 325 \cdot \sin(100\pi t).$$

Deze vraag zou natuurlijk exact opgelost kunnen worden met de formule $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$. Het inkloppen van de formule geeft voor de meeste leerlingen geen problemen. In vraag 4 zit een kleine gemenigheid omdat bij *Getal & Ruimte* wordt geleerd dat twee sinussen met dezelfde periode bij elkaar kunnen worden opgeteld of van elkaar worden afgetrokken en dat dan via de grafische rekenmachine een nieuwe formule kan worden gevonden. Sommige leerlingen raken de kluts kwijt, omdat ze gewend zijn deze aanpak te kiezen, maar dat mag niet omdat er naar een exacte berekening wordt gevraagd. Leerlingen die beginnen met differentiëren in plaats van de formule te herleiden tot een enkele sinus, komen vrij gemakkelijk tot het antwoord. Leerlingen gebruiken nauwelijks de regel van Simpson of de formules van Mollweide, waarschijnlijk omdat hier weinig mee geoefend is en niet standaard tot hun denkpatroon behoort. De tekst over fasedraden leidt wat mij betreft alleen maar af. Tot nu is het examen redelijk goed te doen, geen echte verrassingen, maar toch zitten er voor de zwakke leerling wat valkuilen in.

De spanning op het stopcontact schommelt tussen –325 volt en +325 volt. Toch zegt men in het algemeen dat de spanning op een stopcontact 230 volt is. Dat komt omdat de zogenaamde **effectieve waarde**[1)] van de wisselspanning ongeveer 230 volt is.

figuur

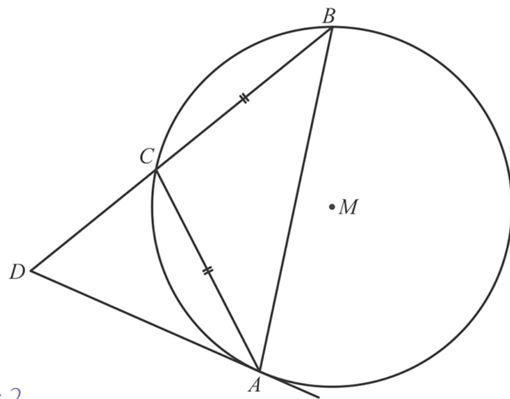


noot 1 De effectieve waarde van een wisselspanning is de waarde van een gelijkspanning die evenveel vermogen levert als de wisselspanning.

figuur 1 Introductie van de *effectieve waarde*

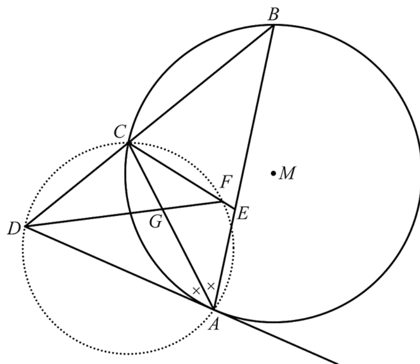
Meetkunde

Bij vraag 5 moet worden bewezen dat *CA* hoek *BAD* door midden deelt, zie figuur 2. Dit is vrij standaard en kan met behulp van verschillende stellingen worden bewezen: met de stelling van de hoek tussen koorde en raaklijn, maar ook met behulp van de middelpunts - omtrekshoekstelling. Bij deze vraag hoeft niet echt goed vooruit te worden gedacht, en is eigenlijk een weggevertje. Leerlingen scoren dan ook vrij goed.



figuur 2

In de volgende vraag wordt gevraagd te bewijzen dat *G* op de cirkel door *A*, *E* en *F* ligt, zie figuur 3.



figuur 3

Voor leerlingen die goed hebben geoefend is het meteen duidelijk dat dit om de koordenvierhoekstelling gaat en dat je moet laten zien dat twee tegenoverstaande hoeken samen 180° moeten zijn. Ze worden daarbij nog eens geholpen door het feit dat de vorige stelling expliciet in de figuur is opgenomen zodat het direct duidelijk is dat met hoek *CAE* gewerkt moet worden. De tegenoverstaande hoek *GFE* kan niet direct worden berekend, maar *GFC* wel, via de constante hoekstelling die bijna vanuit de tekening gilt: gebruik mij! Al met al geen moeilijke opgave. Toch zijn er genoeg leerlingen die bij vraag 6 eieren voor hun geld kiezen en niets invullen.

'VAN DE 69 PUNTEN GAAN ER 36 OVER SINUSSEN!'

Twee sinusoïden, maar eigenlijk een stuk meer

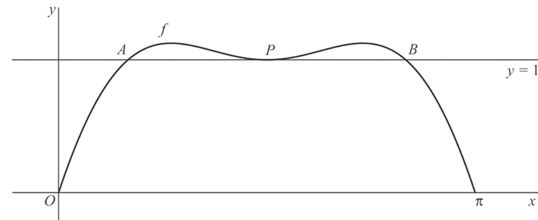
Vraag 7, het maximale verschil tussen twee sinusoïden berekenen bij een zekere *x*-waarde, maakt vraag 4 eigenlijk overbodig. Vreemd dat er weer naar een sinus gevraagd wordt. Ook de volgende opgave gaat weer over een sinus en daarmee vind ik de verhouding een beetje scheef. Van de 69 punten gaan er 36 over sinussen!
Bij vraag 8 wordt gevraagd om de afstand tussen de snijpunten A en B te berekenen, zie figuur 4. Mijn leerlingen scoren hier vrij hoog (6,1 en 4,3 respectievelijk van de 7 en 5 punten)
Deze vergelijking is vrij standaard door $\sin(x) = A$ te stellen en uit te werken. Vreemd genoeg wordt er bij vraag 9 hetzelfde gevraagd als bij vraag 3. Hier wordt echter wel gevraagd om de integraal exact te berekenen. De moeilijkheid zit hem in de $\sin^2(x)$. Ook hier geldt dat

Op het domein $[0, \pi]$ is de functie f gegeven door:

$$f(x) = 3\sin(x) - 2\sin^2(x)$$

De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $(0, 0)$ en $(\pi, 0)$. Zie figuur 1.

figuur 1



figuur 4

dit vraag 3 overbodig maakt: de meeste leerlingen die het antwoord exact kunnen berekenen, kunnen dit ook met behulp van de grafische rekenmachine. De laatste uitwerking van het correctiemodel, waarbij gebruik wordt gemaakt van verschilformules, ben ik niet tegengekomen. Vraag 10 waarbij twee constanten moeten worden bepaald is wat mij betreft een weggevertje, maar toch scoort deze vraag beduidend minder dan vraag 7 en 8.
Het woord helling impliceert dat we naar de afgeleiden moeten kijken, een tip die nog eens wordt versterkt door de figuur.

Brand!

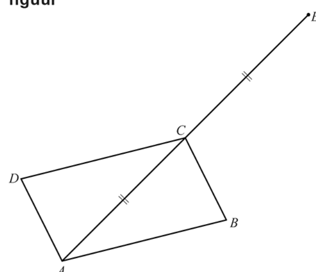
De volgende opgave gaat over brandwerendheid. Blijkbaar is $T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9}$ toch een lastige functie om te differentiëren, alhoewel er gewoon gebruik gemaakt kan worden van de kettingregel. Het maximum moet worden berekend. Wat vreemd is, is dat in het correctiemodel niets geschreven is over de mogelijkheid dat de e-macht zelf 0 kan zijn. Wordt dit als vanzelfsprekend verondersteld? Een vergelijking van de vorm $A \cdot B = 0$ heeft als oplossing $A = 0$ of $B = 0$. Je moet dan onderzoeken of alle oplossingen wel daadwerkelijk oplossingen zijn.
De introductie bij vraag 12 is ook vreemd, omdat een werkelijke situatie wordt nagebootst, maar de grafiek van de nabootsing is totaal anders dan die van de werkelijke situatie. Wat wordt er dan precies nagebootst? Vraag 12 is heel standaard en wordt door bijna alle leerlingen goed gemaakt. Het komt hierop neer: de vergelijking $20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300$ moet worden opgelost.
Vraag 13 vraagt nogal wat leeswerk. Er moet worden onderzocht of de deur 30 minuten standhoudt bij een natuurlijke brand. Helaas kan alles worden ingevoerd in de grafische rekenmachine en blijkt de formule $T_{nat}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9}$ erg foutgevoelig. Jammer dat de functies er niet anders uitzien zodat er exact gerekend kan worden. Hiermee komt het aantal punten dat met de GR kan worden opgelost op 15, wat op zich wel meevalt.

Parallellogram

Parallellogram met verlengde diagonaal

Gegeven is parallellogram $ABCD$. Punt E ligt op het verlengde van diagonaal AC zodanig dat $CE = AC$. Zie de figuur, die ook staat afgebeeld op de uitwerkbijlage.

figuur



Punt C is het snijpunt van de zwaartelijnen van driehoek DBE.

5p **14** Bewijs dit.

figuur 5

De laatste vraag, zie figuur 5, wordt door sommige leerlingen ook weer bewust overgeslagen.

Veel leerlingen die toch een poging wagen, vergeten dat ze bij de zwaartelijn moeten werken met de verhouding 2:1. Leerlingen die hun werk braaf hebben gedaan, scoren hier punten. Hiermee komt het aantal punten voor meetkunde op 12. Vorig jaar was dit aantal nog 17 punten.

Conclusie

Het examen is wat mij betreft prima te doen. Er zitten redelijk wat standaardopgaven in. De meeste algebraopgaven zijn rechttoe rechtaan, alleen de binnenkomer had wat vriendelijker mogen zijn. Er ligt wat mij betreft te veel nadruk op goniometrie en er worden wat zaken dubbel gevraagd. De contexten voegen naar mijn smaak niets toe, en zouden wat mij betreft meer zijn voor in de les. Ook zouden er naar mijn idee wat meer inzichtvragen kunnen worden toegevoegd, omdat nu bij bijna elke vraag de oplossingsstrategie vrijwel direct duidelijk is. Wellicht wordt dat gat de komende jaren opgevuld met wiskundige denkactiviteiten. De meetkundeopgaven worden standaard als moeilijk gekwalificeerd, maar op de keper beschouwd zijn de opgaven vrij eenvoudig. De N-term van 1,5 is naar mijn mening absurd hoog. Mijn collega's en ik dachten meer aan 0,7 of 0,8. Ook leerlingen die ik na het eindexamen sprak, vonden het examen goed te doen. Al met al vind ik de moeilijkheidsgraad van dit examen te laag, en hoop ik dat er met de denkactiviteiten meer van de leerlingen gevraagd wordt om na te denken, in plaats van standaardreceptjes te leren.
Voor meer over het wiskunde B-examen zie *Wiskundebrief* 776, waarin ook twee linkjes naar examenrecensies zijn opgenomen van twee wiskundigen, die werkzaam zijn aan een universiteit, en een onderzoekje naar de verschillen tussen de examens van vorig jaar en dit jaar.

Over de auteur

Gerardo Soto y Koelemeijer is docent wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium Leiden, eindredacteur bij *MathPlus,* columnist bij tijdschrift *Van Twaalf tot Achttien*, auteur van fictie en non-fictie en binnenkort post-doc bij het ICLON-Leiden. E-mailadres: *sotoykoel@hotmail.com*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Wiskundeknobbel?



Bestaat de wiskundeknobbel dan toch echt? Franse wetenschappers hebben de hersenen van de beroemde filosoof René Descartes gereconstrueerd. Descartes, die door veel wiskundigen wordt gezien als grondlegger van de analytische meetkunde, had een opvallende uitstulping in zijn voorhersenen. De wetenschappers maakten de replica van Descartes' brein door zijn schedel te bestuderen. De hersenen van de filosoof en wiskundige zijn al vergaan, maar het brein heeft een duidelijke afdruk achtergelaten in de schedelpan van de Fransman. De onderzoekers maakten een scan van deze afdruk en reconstrueerden het brein met behulp van een computerprogramma. Zo ontstond er een virtuele replica van het brein. De hersenomvang van Descartes werd vervolgens vergeleken met het brein van meer dan honderd andere willekeurige mensen die in de afgelopen eeuwen zijn overleden. Uit deze studie blijkt dat de prefrontale cortex van de filosoof een ongebruikelijke uitstulping had, aldus de nieuwssite van het tijdschrift *Science*. Alleen geen wiskundeknobbel: eerdere studies hebben uitgewezen dat het hersenweefsel in dit deel van het brein een rol speelt bij de verwerking van woorden ...

Bron: http://www.nu.nl/wetenschap/4676463/filosoof-descartes-had-opvallende-bobbel-in-hersenen.html

Nederland overtuigende winnaar Benelux Wiskunde Olympiade



Bij de Benelux Wiskunde Olympiade, die begin mei plaatsvond in Namen (België), heeft het Nederlandse team de teams uit België en Luxemburg ruim verslagen. Negen van de tien teamleden behaalden een medaille. Het Nederlands team scoorde in totaal 165 punten en liet daarmee België (127 punten) en Luxemburg (56 punten) ver achter zich. De Benelux Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren uit België, Luxemburg en Nederland. Elk team bestaat uit tien leerlingen. Het Nederlandse team is via vier voorrondes geselecteerd uit ruim 10.000 deelnemers. De wedstrijd bestaat uit vier uitdagende wiskundeopgaven waar de deelnemers vierenhalf uur de tijd voor hebben. De beste helft van de deelnemers krijgt een medaille (brons, zilver of goud).

Thomas Chen (5 vwo, Gymnasium Haganum Den Haag) en Wietze Koops (6 vwo, RSG Stad & Esch Lyceum Meppel) behaalden beiden een gouden medaille, zij scoorden beiden 22 punten. Een zilveren medaille was er voor Erik van Cappellen (6 vwo, Johannes Fontanus College Barneveld, 19 punten), Ludo Dekker (6 vwo, Johan de Witt Gymnasium Dordrecht, 19 punten) en Siebe Verheijen (6 vwo, Martinuscollege Grootebroek, 18 punten).

Matthijs van der Poel (4 vwo, Christelijk Gymnasium Utrecht, 16 punten), Ward van der Schoot (6 vwo, Stedelijk Gymnasium Breda, 16 punten), Nils van de Berg (5 vwo, Sint-Oelbertgymnasium Oosterhout (NB), 15 punten) en Maarten Stremler (5 vwo, Wartburg College Guido de Bres Rotterdam, 12 punten) kregen een bronzen medaille. Lammert Westerdijk (5 vwo, Stedelijk Gymnasium Leeuwarden, 6 punten) viel helaas buiten de medailles. In totaal werden vijftien medailles uitgereikt: drie gouden, vijf zilveren en zeven bronzen medailles. Nederland behaalde dus niet alleen de meeste punten, maar sleepte ook van elk edelmetaal meer dan de helft van de medailles in de wacht. De derde gouden medaille was voor de Belg Savinien Kreczman, die met het maximale aantal van 28 punten alle andere deelnemers versloeg. Begin juni werd ook de selectie voor de Internationale Wiskunde Olympiade in Brazilië bekend gemaakt. Behalve de hierboven genoemde Nils, Wietze, Matthijs en Ward maken de 15-jarige Levi van de Pol uit Veenendaal (4 vwo, Ichthus College Veenendaal) en de 19-jarige Gabriel Visser uit Spijkenisse (6 vwo, Stedelijk Gymnasium Schiedam) deel uit van het Nederlands team. De eerdergenoemde 15-jarige Lammert Westerdijk zal mee gaan als winnaar van de aanmoedigingsprijs.

Bron: wiskundeolympiade.nl

SMART-finale W4Kangoeroe

Dit jaar werd voor de vierde keer de SMART-finale georganiseerd. De beste 20 deelnemers van groep 7, groep 8 en van het vmbo-smart (en dat is nieuw dit jaar!) werden uitgenodigd om op dinsdag 13 juni deel te nemen aan deze finale. In sciencecenter Nemo (Amsterdam) streden uiteindelijk 57 leerlingen (18 uit groep 7, 20 uit groep 8 en 19 van het vmbo) voor een plaatsje bij de beste drie van hun groep. De finale werd gespeeld over twee rondes (één met zestien meerkeuzevragen en één met acht open vragen).

Na een spannende en enerverende dag werd duidelijk wie de prijswinnaars waren. Alle deelnemers kregen dezelfde opgaven en de maximale score was 56 punten.

Bij groep 7:
1. Allie Zong uit Veldhoven met 45 punten
2. Ties Lesmeister uit Soest met 36 punten
3. Fleur Groot Rouwen uit Hengelo, Ryan Staal uit Barendrecht en Yanniek Alexander Nitescu uit Eindhoven met 35 punten
Bij groep 8:
1. Bram Hesselink uit Enschede met 46 punten
2. Manon Jacobs uit Beverwijk met 41 punten
3. Olaf Rijnboutt uit Bunnik met 40 punten
Bij het vmbo:
1. Willine van den Berg uit Barneveld met 29 punten
2. Tetske Hofstra uit De Wilp met 27 punten
3. Wesley Wiggers uit Lemmer met 26 punten
Op www.w4kangoeroe.nl kunt u een foto-impressie en de opgaven vinden.
Bron: www.w4kangoeroe.nl

Geef geen cijfers

Cijfers geven werkt niet. De Britse professor Dylan Wiliam pleit ervoor de kennis van leerlingen niet te meten in een toets aan het einde van een lesperiode. Hij adviseert continu te evalueren of leerlingen de stof hebben begrepen en ze feedback te geven.
Een groep leraren ondersteunt de aanpak van Wiliam, meldt *AD*. Zij menen dat het dodelijk is voor de nieuwsgierigheid van leerlingen en het ook niet helpt om de stof te leren. Wiskundedocent Jörgen van Remoortere kan zich ook vinden in de aanpak. Met collega's Arjan Moree en Martin Ringenaldus richtte hij de Facebookgroep 'Actief leren zonder cijfers' op.
Cees van der Vleuten, hoogleraar onderwijskunde aan de Maastricht University, juicht het toe dat leraren van de klassieke beoordeling met cijfers af willen. 'Toetsing moet in dienst staan van het bevorderen van beter leren. Door alleen cijfers te geven, raakt dat uitgehold.'
Op het Cartesius 2 in Amsterdam vindt schoolleider Martijn Meerhoff het ook genoeg geweest met de cijfers. Leerlingen van havo/vwo hebben twee lange lessen per dag in groepen van vijftig leerlingen waarbij twee docenten aanwezig zijn. Ze krijgen geen vakken maar modules met een centraal thema. Blijven zitten kan niet en cijfers kennen de leerlingen niet.
De aanpak vraagt veel van docenten. Meerhoff: 'Ze geven bijvoorbeeld niet langer les op één vakgebied. In de module "Amsterdam" komen geschiedenis, kunstgeschiedenis, Engels en filosofie voorbij. Ook moeten leraren continu feedback geven en per scholier bedenken wat de beste strategie is om hem zich verder te laten ontwikkelen. Het scherpt de docenten en de leerlingen. We willen dat leerlingen autonoom worden en beter leren. Ze mogen zelf hun strategie bepalen en falen is geen ramp, maar een moment om te reflecteren.'
Meerhoff ziet dat het effect heeft: 'leerlingen kunnen beter dan andere 12-jarigen hun functioneren beoordelen.' Van ouders hoort hij dat de gesprekken aan tafel veranderen. De kinderen praten mee over verkiezingen en wat in de krant staat. De school van Van Remoortere is nog niet om. In de toetsweek hadden leerlingen wiskunde niet erg goed gemaakt, omdat ze zich op de vakken hadden geconcentreerd waarvoor ze wel een cijfer kregen. Van Remoortere: 'Het mooist vind ik dat ouders opmerken dat hun leerlingen weer nieuwsgierig worden van de lessen.'
Bron: https://www.primaonderwijs.nl/nieuws/geef-geen-cijfers

Verrassende wiskundige en statistische aspecten in de sport

Miriam Loois, statisticus en docent wiskunde, heeft een blog over Sport en Statistiek *(https://miriamenstatistiek.wordpress.com/)*. Hierin kijkt ze naar wiskundige en statistische aspecten van allerlei sporten. Dit voorjaar constateerde Miriam, toen met het oog op de World Tour Beachvolleybal en de World League Volleybal, dat het in beide sporten onvoordelig is om te serveren. Tussen gelijkwaardige tegenstanders heeft de ploeg die de bal in het spel brengt, slechts een kans van ongeveer een derde om dit punt te winnen. Twee op de drie keer kan de tegenpartij de bal opvangen en succesvol counteren. De service gaat dan over naar de andere ploeg, die dan in het nadeel komt. Daarom is het op topniveau vrij zeldzaam als dezelfde ploeg drie of meer keer achter elkaar serveert.
Bij sporten waar je om en om serveert, zoals tennis, maakt het (afgezien van eventueel psychologisch voor-of nadeel) niet uit wie er begint met serveren. Maar bij volleybal zorgen de regels ervoor dat degene die begint met serveren minder dan vijftig procent kans heeft om te winnen.
Het blijkt dat bij beachvolleybal de kans om een set te winnen niet *fiftyfifty* verdeeld is. Als beide teams 1/3 van hun servicebeurt winnen, wint het team dat begint met serveren in 47,3 % van de gevallen de set en het team dat begint met ontvangen dus in 52,7% van de gevallen.
Meer wiskunde en statistiek in de sport kunt u vinden op *https://miriamenstatistiek.wordpress.com/*
Bron: Wiskunde PersDienst

ALGEBRAÏSCHE VAARDIGHEDEN IN DE NIEUWE EXAMENS WISKUNDE HAVO EN VWO

Irene van Stiphout
Paul Drijvers
Ruud Stolwijk
Jos Remijn

In de nieuwe examenprogramma's wiskunde van havo en vwo is het belang van algebraïsche vaardigheden groter. Wat zien we daarvan terug in de centrale examens? Scoren leerlingen van de pilotscholen op algebravragen beter dan de leerlingen van reguliere scholen? Irene van Stiphout en haar collega's bij Cito onderzochten dit. Ze vonden dat er inderdaad meer algebra in de examens zit en dat de leerlingen van pilotscholen hier iets hoger op scoren.

Inleiding

Sinds 2011 (havo) en 2012 (vwo) worden pilotexamens afgenomen voor havo wiskunde A tot en met vwo wiskunde B. In de nieuwe examenprogramma's die hieraan ten grondslag liggen is meer aandacht gekomen voor algebraïsche vaardigheden. Om na te gaan in hoeverre de invulling van de vernieuwing in de pilotexamens een adequate toetsing vormt van deze nieuwe examenprogramma's, heeft Cito zowel de inhoud van de pilotexamens als de resultaten van leerlingen onderzocht.
Het doel van het onderzoek was om antwoord te geven op de volgende twee vragen:

1. Welk type algebraïsche vaardigheden wordt getoetst in de centrale pilotexamens wiskunde A en B voor havo en vwo in de periode 2011-2016?
2. Hoe presteren leerlingen van pilotscholen op het gebied van algebraïsche vaardigheden in verhouding tot de leerlingen die hebben deelgenomen aan de reguliere examens?

Aanpak

Voor de eerste onderzoeksvraag is in kaart gebracht wat voor soort algebraïsche vaardigheden in de syllabi staan van de nieuwe programma's voor havo wiskunde A en B, en vwo wiskunde A en B. Hieruit zijn vijf algebraïsche activiteiten gedestilleerd: formule of vergelijking opstellen; structuur van expressies herkennen; rol van een parameter bepalen; flexibiliteit tonen en herleidingen en vergelijkingen oplossen. Voor elk van deze vijf activiteiten hebben we drie niveaus van conceptueel begrip onderscheiden: niet of nauwelijks – enigszins – veel. Dit heeft geleid tot een tabel waarvan de rijen gevormd worden door die vijf activiteiten en de kolommen door de drie conceptuele niveaus. Van elke cel in de tabel is een beschrijving gemaakt waaraan een activiteit moet voldoen om in die cel geplaatst te worden.

We hebben ons beperkt tot de examens van wiskunde A en wiskunde B. Omdat de rol van algebra bij wiskunde C minder groot is en de leerlingaantallen klein zijn, is wiskunde C niet meegenomen in de analyses. Van elk examen is alleen het eerste tijdvak gecodeerd, omdat hieraan veel leerlingen meedoen en er dus veel gegevens beschikbaar zijn. In 2011 zijn er voor het eerst pilotexamens afgenomen in het havo; een jaar later, in 2012, voor het eerst in het vwo. In de analyse zijn alle pilotexamens in het eerste tijdvakken meegenomen tot en met 2016. Dat zijn totaal 44 (6 + 5 jaar, maal twee vakken, maal twee niveaus) examens.
De eenheid waarop is gescoord zijn de losse 'bolletjes' in de correctievoorschriften. De veronderstelling is dat een bolletje in het correctievoorschrift een denkstap voorstelt en dat die stappen min of meer vergelijkbaar zijn door de jaren heen. Meestal correspondeert een bolletje met één scorepunt.
In lijn met de beschrijvingen in de syllabi hebben we een vrij strenge definitie gehanteerd van algebra. Dat betekent dat bijvoorbeeld het bepalen van een groeifactor per jaar in een context waarbij twee meetwaarden met een tussenperiode van 10 jaar *niet* als algebra is gecodeerd, omdat er niet met variabelen wordt gewerkt. Alle examens zijn door minstens twee deskundigen gecodeerd en vervolgens zijn beide coderingen samengevoegd voor de analyses.
Voor de tweede onderzoeksvraag is gekeken naar de prestaties van leerlingen op vragen die zowel in de reguliere als in de pilotexamens zaten. Van deze overlapvragen is het type vaardigheid en het conceptuele niveau bepaald. Vervolgens zijn van deze vragen de p-waarden verzameld uit de databestanden waarover Cito beschikt na afloop van de examens. Deze *p*-waarden zijn getransformeerd tot zogeheten logits om ze geschikt te maken voor vergelijking van groepen.

mate van benodigde conceptuele vaardigheden				
niveau en soort wiskunde	niet/nauwelijks	enigszins	veel	totaal
havo wiskunde A	5%	13%	2%	20%
havo wiskunde A pilot	10%	17%	4%	30%
havo wiskunde B	19%	12%	4%	35%
havo wiskunde B pilot	20%	19%	9%	47%
vwo wiskunde A	13%	12%	0%	26%
vwo wiskunde A pilot	16%	22%	6%	44%
vwo wiskunde B	19%	25%	2%	46%
vwo wiskunde B pilot	21%	30%	17%	67%

tabel 1 Relatief aantal punten in algebraïsche vaardigheden per vak en conceptueel niveau

Resultaten

Om na te gaan hoeveel algebra in de examens voorkomt, is voor elk examen bepaald hoeveel punten te behalen zijn in elk van de algebra categorieën. De resultaten staan in tabel 1, uitgesplitst naar vak en naar conceptueel niveau. Opvallend is ten eerste dat de pilotexamens relatief flink meer punten algebra bevatten dan de reguliere examens. Dit is in lijn met het doel van de vernieuwing om meer aandacht te besteden aan algebra (cTWO, 2007). Ten tweede zien we bij havo en vwo en bij wiskunde A en B een verschuiving naar meer conceptuele algebra. Deze toename in de hoeveelheid algebra en de verschuiving naar meer conceptuele algebra is bij havo wiskunde A vooral terug te vinden in de kolommen 'niet of nauwelijks' en 'enigszins'. Voor de overige drie vakken (havo wiskunde B, vwo wiskunde A, vwo wiskunde B) is deze trend vooral te zien in de kolommen 'enigszins' en 'veel'.

In tabel 2 is de algebra in de examens uitgesplitst naar de vijf soorten algebraïsche activiteiten. Voor havo en vwo en voor wiskunde A en B zijn er relatief veel punten te behalen met formule of vergelijking opstellen en met herleidingen en vergelijkingen. Een kleiner deel van de activiteiten zit in 'structuur expressies herkennen'. Relatief weinig punten hebben de activiteiten 'flexibiliteit tonen' en 'rol parameter bepalen', al is dat bij de pilotexamens iets hoger dan bij de reguliere examens. Dit betekent dat de pilotexamens iets meer verschillende algebraïsche vaardigheden bevatten dan de reguliere examens en dat het scala aan algebraïsche activiteiten dat in de syllabus wordt genoemd niet volledig is terug te vinden in de examens.

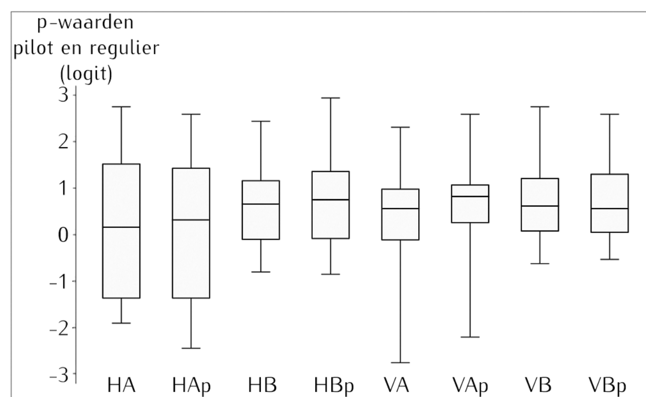
Om na te gaan of de prestaties van leerlingen vooruit zijn gegaan, hebben we de prestaties van leerlingen vergeleken op vragen over algebra uit de overlap van reguliere en pilotexamens. Dit aantal wisselt per examen tussen twee en zeven vragen. In tabel 3 staan de verschillen in p-waarden tussen reguliere en pilotleerlingen per vak. Het gemiddelde verschil in p-waarden over de 112 vragen is ongeveer 2 procentpunten ($M = 1{,}93$; $SD = 6{,}5$). De *p*-waarden van de pilotleerlingen blijken significant hoger zijn dan die van de reguliere leerlingen ($t\,(111) = 3{,}2$; $p = 0{,}002$). De conclusie is dan ook dat de pilotleerlingen op de algebra overlap-vragen significant beter scoren dan de reguliere leerlingen.

	HA	HAp	HB	HBp	VA	VAp	VB	VBp
formule of vergelijking opstellen	9%	10%	13%	15%	10%	20%	13%	19%
structuur expressies herkennen	2%	5%	1%	2%	5%	8%	2%	2%
rol parameter bepalen	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
flexibiliteit tonen	0%	2%	0%	1%	0%	1%	0%	0%
herleiden en vergelijkingen oplossen	8%	13%	21%	29%	11%	15%	31%	45%
totaal	20%	30%	35%	47%	26%	44%	46%	67%

tabel 2 Relatief aantal punten in algebraïsche vaardigheden per vak uitgesplitst naar activiteiten

vak	gemiddeld verschil p-waarde (SD)
havo wiskunde A	0,26 (5,1)
havo wiskunde B	3,45 (5,0)
vwo wiskunde A	4,45 (7,6)
vwo wiskunde B	-0,08 (7,9)

tabel 3 Verschil in p-waarden op overlapvragen algebra per vak



figuur 1 Boxplot van de verschillen in logits van p-waarden uitgesplitst naar vak

Figuur 1 geeft deze verschillen in prestaties weer, uitgesplitst naar de vier wiskundevakken. Met name bij havo wiskunde B en bij vwo wiskunde A wordt door pilotleerlingen hoger gescoord. De conclusie is dus dat de verschillen in p-waarden met name aan de orde zijn voor havo wiskunde B en vwo wiskunde A. Wat opvalt, is dat de prestaties in algebra bij vwo wiskunde B niet vooruit zijn gegaan, waar dat wellicht wel in de lijn der verwachting lag. Dit beeld wordt vooral veroorzaakt door de lagere algebraprestaties van pilotleerlingen bij vwo wiskunde B in 2014. Duidelijke trends wat betreft afnamejaar, type algebraïsche vaardigheid, of conceptueel niveau zijn niet gevonden.

Conclusie

Samengevat kunnen we stellen dat de pilotexamens meer algebra bevatten dan de reguliere examens en dat de pilotexamens meer conceptuele algebra bevatten dan de reguliere examens. Dit is in lijn met de doelstellingen van de vakvernieuwing. Daarnaast valt op dat de algebraïsche activiteiten die in de syllabi zijn beschreven niet in de volle breedte terugkomen in de examens. We denken dat dit vooral komt doordat sommige activiteiten meer impliciet aan de orde komen. Bij het oplossen van een vergelijking bijvoorbeeld zal de leerling het type vergelijking moeten herkennen voordat hij een geschikte oplossingsmethode kan kiezen. Deze stap wordt echter niet beloond met een punt in het correctievoorschrift en is dus niet gescoord in onze analyse. Toch denken we dat de diversiteit aan algebraïsche activiteiten een aandachtspunt kan zijn in de toekomstige constructie. Verder laat de analyse zien dat de pilotexamens meer conceptuele algebraïsche vaardigheden bevatten dan de reguliere examens. Dit verschil is bij beide vakken en beide niveaus te zien maar bij wiskunde B groter dan bij wiskunde A. Ook dit is in lijn met de doelstellingen van de vernieuwing.
Wat betreft de prestaties van leerlingen op algebra concluderen we dat de pilotleerlingen beter op algebra presteren dan de leerlingen van de reguliere programma's. Verschillen in afnamejaar, type vaardigheid en conceptueel niveau zijn niet gevonden. Uiteraard moeten deze conclusies alleen al gezien het beperkte aantal leerlingen in de pilot met de nodige voorzichtigheid bekeken worden.
Tot slot bevelen we aan om de komende jaren centrale eindexamens te blijven monitoren op wiskundige denkactiviteiten en op algebraïsche vaardigheden.

Literatuur

– cTWO (2007). Rijk aan betekenis, visie op vernieuwd wiskundeonderwijs. Utrecht: cTWO.
– Cito (2017). Monitoring algebraïsche vaardigheden in de nieuwe examens wiskunde havo en vwo. Intern rapport. Arnhem: Cito.

De syllabi die in dit onderzoek zijn gebruikt, zijn te vinden op *www.examenblad.nl.*

Over de auteurs

Irene van Stiphout is werkzaam als lerarenopleider bij de Hogeschool Arnhem Nijmegen en als toetsdeskundige bij Cito. E-mailadres: *irene.vanstiphout@cito.nl*
Paul Drijvers is onderzoeker bij Cito en hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij de Universiteit Utrecht. E-mailadres: *paul.drijvers@cito.nl*
Ruud Stolwijk is toetsdeskundige bij Cito. E-mailadres: *ruud.stolwijk@cito.nl*
Jos Remijn is toetsdeskundige bij Cito. E-mailadres: *jos.remijn@cito.nl*

VWO WISKUNDE C-EXAMEN

Winry 't Lam

Winry 't Lam bespreekt de opgaven van het wiskunde C-examen en hoe zijn groep van tien leerlingen het ervan afbracht. Met speciale aandacht voor het kunstwerk van Ellsworth Kelly dat op het examen voorkwam.

Afgelopen twee jaar heb ik mogen genieten van tien totaal verschillende leerlingen die zich samen met mij hebben voorbereid op het examen wiskunde C van 2017. Op maandag 13 mei jl. was het dan 'eindelijk zover'. De meeste van mijn leerlingen hadden er echter al een groot aantal examens op zitten, met dank aan de samenstellers van het examenrooster. Gelukkig zagen ze tegen wiskunde niet op ...

In vergelijking met het wiskunde A-examen was het C-examen toch een stukje pittiger. Misschien was het A-examen wel aan de eenvoudige kant. Een redelijk aantal opgaven met overlap maar wel in een andere volgorde. Met de vooraf gegokte N-term van 0,7 voor wiskunde A zat ik aardig in de richting (N = 0,6), maar de N-term van 0,7 voor wiskunde C had ik hoger verwacht.

Het huidige examenprogramma zit er op. Vergeleken met het afgenomen pilotexamen, met onderdelen als *logica*, *vorm en ruimte*, *venndiagrammen* en *rijentheorie* zal het komende programma meer van de leerlingen gaan eisen. Ik zal de leerlingen die dit jaar niet slagen dan ook adviseren om aan het bezemprogramma mee te doen. Maar laten we het examen eens bekijken ...

Marathonloper

Een aardig begin voor de leerlingen en leuk voor de docent die graag hardloopt. Deze vraag komt terug in het A-examen als vijfde onderdeel. Veel gelijksoortige opgaven hadden we geoefend en ik had de leerlingen vooral gewezen op eenheden en tussentijds afronden. Jammer dat bij opgave 2 en 4 hetzelfde kunstje als procentuele toe- of afname wordt gevraagd.

Er worden geen hoogstaande dingen gevraagd en door goed lezen en niet bang te zijn om formules in te vullen, scoren mijn leerlingen redelijk goed. Dat biedt hoop voor de rest.



figuur 1 Hicham El Guerrouj (Marokko), 'King of the Mile'. Zijn wereldrecord op de 1500 m uit 1998 geldt nog steeds

Inkomensklasse

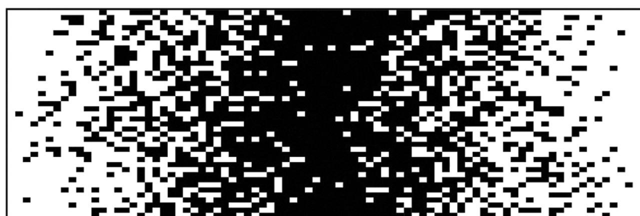
Dit ziet er wat lastiger uit, maar gelukkig geeft de toelichting onder de figuur wat duidelijkheid, zie figuur 4 op blz. 16 in deze *Euclides*. Toch is opgave 5 lastig voor mijn leerlingen. Ook zelf moet ik even goed lezen. Gelukkig hebben een aantal het door. De rest van dit onderdeel wordt erg wisselend gescoord. Bij opgave 7 is het 'sprokkelen' van punten en opgave 8 biedt nogal wat creatieve mogelijkheden om Nico gelijk te laten krijgen, maar dat levert helaas weinig punten op. Waarom niet opgave 8 als eerste van dit onderdeel met een vraag zoals: 'Volgens Nico blijkt deze kans 0,016 te zijn, toon aan dat Nico gelijk heeft', zodat iedereen het systeem beter door krijgt (wat op zich wel handig is voor de rest van de opgaven van dit onderdeel).

Ik weet zelf niet zo goed wat ik van dit onderdeel vind. Lastig leeswerk, wat meestal bij kansberekening het geval is. Mijn leerlingen volgen mijn adviezen op (accentueer, blijf rustig en lees nog een keer wat ze eigenlijk vragen), maar sommigen lopen vast.

Zon op het dak

Gelukkig gaat de zon weer redelijk schijnen bij het derde onderdeel. Duidelijke uitleg van de examenmakers en de formule $Z = 393{,}75 \cdot 1{,}05^{t-1}$ afleiden is prima te doen. Ook het exponentiële gedeelte, wat in ieder geoefend examen zit, wordt goed gemaakt. Los van een enkele lastige jaarafronding bij het antwoord op de laatste vraag, gaat dit onderdeel erg lekker. Een leuke praktijkvraag (met onder andere subsidie) die ook C-leerlingen goed kunnen volgen. Dit onderdeel zat ook deels in het begin van het A-examen.

Kunstwerk



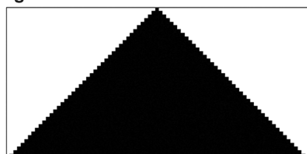
Het paneel is ingedeeld in 83 (verticale) kolommen en 41 (horizontale) rijen. De meest linkse kolom is helemaal wit. In de kolom direct rechts daarvan bevindt zich 1 zwart vakje, de kolom daarnaast bevat één zwart vakje meer, enzovoort, totdat in de middelste kolom alle 41 vakjes zwart zijn. Er is maar één kolom met allemaal zwarte vakjes. Daarna bevat elke volgende kolom steeds één zwart vakje minder.

figuur 2 *Seine* van Ellsworth Kelly (1951)

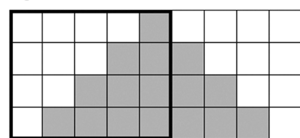
Dikwijls is een kunstwerk het uitgangspunt voor een onderdeel kansberekening en combinatoriek op het examen. Het is goed om de jeugd in aanraking te laten komen met kunst, toch denk ik dat de leerlingen bij het zien van dit kunstwerk andere reacties zullen moeten onderdrukken. Het kunstwerk is *Seine* van Ellsworth Kelly. Op Wikipedia valt te lezen: ‘Een ontmoeting met Jean Arp in 1950 was het begin van een serie werken waarin kansrekening en combinatoriek een rol spelen bij de plaatsing van objecten in zijn werken.’
Drie van de tien leerlingen scoren nog redelijk, maar de rest van mijn Wolfscore wordt aardig gevuld met nullen. Hier hebben de examenmakers zich toch redelijk vergist in vraagstelling en de bedoeling van een wiskunde C-examen. Begrijpend lezen is belangrijk, maar het blijft een wiskunde-examen. Gelukkig wordt wel figuur 3 aangedragen als hulp, zodat een aantal leerlingen toch nog wat kan ‘sprokkelen’ bij opgave 13 door het aantal zwarte vakjes uit te rekenen.

Om te berekenen hoeveel zwarte vakjes er in totaal zijn, kun je in gedachten alle zwarte vakjes in de kolommen naar beneden schuiven. Zie figuur 2.
In een dergelijke figuur kun je het totale aantal zwarte vakjes bijvoorbeeld berekenen door de figuur op te delen in rechthoeken. In figuur 3 is in een figuur van slechts 9 vakjes breed en 4 vakjes hoog een rechthoek van 5 bij 4 getekend waarvan precies de helft van de vakjes donker is.

figuur 2



figuur 3



4p **13** Bereken het totale aantal zwarte vakjes in het kunstwerk 'Seine'.

figuur 3 ‘Versimpeling’ van het kunstwerk *Seine*

Dan komt de gulden snede ineens naar voren en gaat mijn hart sneller kloppen. Als liefhebber van Fibonacci en architectuur hoop ik al jaren op een vraag over de gulden snede (hiervoor moeten we terug naar een A1-examen uit 2007). Mijn leerlingen weten dit, omdat dit onderwerp regelmatig ter sprake komt in mijn lessen. Helaas hebben de leerlingen van mijn passie weinig profijt. Het blijft slechts een onderzoeksvraag en ze hadden dit onderdeel al redelijk opgegeven ...

Rekenonderzoek

Het laatste onderdeel gaat over TIMSS, zie figuur 4. Gaan ze nog wat punten halen na het vorige moeizame onderdeel of zijn ze afgehaakt ...? Zoals ik al had aangegeven, is het voor velen het tweede examen deze dag en een zware start van de examenperiode. Ze zijn redelijk op, maar houden vol ... en gaat dit onderdeel nog wel aardig.

Internationaal rekenonderzoek

Sinds 1995 vindt er elke vier jaar een internationaal reken- en wiskundeonderzoek plaats onder leerlingen uit groep 6 van de basisschool. Dit onderzoek heet TIMSS. De gemiddelde score van alle deelnemende landen in 1995 is op 500 gesteld. Leerlingen krijgen een geheel getal als score. De gemiddelde scores van elk land worden ook afgerond op gehele waarden.

figuur 4 TIMSS

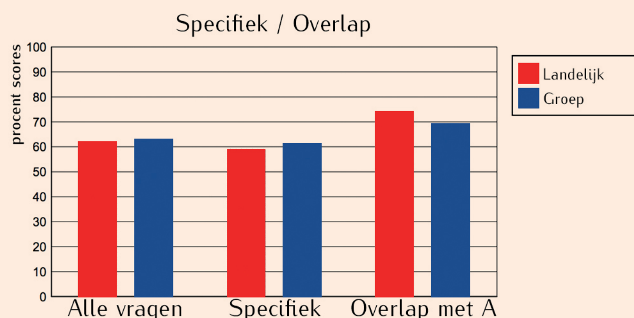
Eindelijk een lineair verband in het examen, wat natuurlijk niet mocht ontbreken. Misschien lastig dat er tussen de gegeven scores van 549 - 540 en 535 niet eenzelfde afname zit, maar het correctiemodel gaat hier wat soepel mee om. Helaas hebben de leerlingen geen correctiemodel en wordt er moeilijker gedacht dan nodig. Maar ook dat is een vaardigheid die getoetst moet worden in een examen. Ik kan me hier zelf wel in vinden.
Gelukkig komen er nog twee opgaven kansberekening met een normale verdeling. Dat betekent scoren voor mijn leerlingen ... of toch niet helemaal ...? Om de continuïteitscorrectie te vragen voor een wiskunde C-examen gaat me wel wat ver; zeker als dat in het examen wiskunde A niet terug komt. Dit kost iedereen een punt. Gelukkig hoeft dit maar eenmalig aangerekend te worden.
Het examen eindigt met een onderzoeksvraag met normaalwaarschijnlijkheidspapier voor 5 punten. Dit moet scoren worden, want is immers eindeloos geoefend: intervallen - rechtergrenzen - cumulatief - bij benadering een rechte lijn - en noem maar op. Toch weten acht van de tien leerlingen niet wat ze met deze percentielscores moeten beginnen. Er worden wel wat punten uitgezet op het waarschijnlijkheidspapier - natuurlijk komt er ‘bij benadering’ een rechte lijn uit - maar echt weten wat ze met de vraag aan moeten doen ze niet. Zonde van deze gemiste kans ...

Compensatiescore

Vooraf is veel te doen geweest over de compensatie bij het aanrekenen van afrondingsfouten. Deze moeten worden gecompenseerd in een extra scoreonderdeel van Wolf, indien er meer dan tweemaal een score in mindering is gebracht voor een afrondingsfout. Geen van mijn leerlingen maakt hier aanspraak op. Persoonlijk vind ik dat een leerling deze vaardigheid moet beheersen en hier dus op getraind moet worden. Uit de Wolfrapportage blijkt dat er landelijk weinig tot geen aanspraak is gemaakt op deze compensatie.

Conclusie

Met een score van 48 punten (uiteindelijk met N-term 0,7 een 6,3 als cijfer) ben ik zeker niet ontevreden en ben ik trots op mijn leerlingen die allemaal met een voldoende eindcijfer eindigen. Afgelopen twee jaar hebben ze de 'taal van wiskunde' beter geleerd en wat plezier in wiskunde gekregen. Een mooi proces om te zien. Landelijk blijkt het ook zeker geen slecht resultaat te zijn. De specifieke wiskunde C-onderdelen zijn zelfs iets beter gegaan, de wiskunde A- onderdelen liggen net iets onder de landelijke score, zie figuur 5. Dat lijkt me te verdedigen, aangezien deze leerlingen apart les hebben gehad en niet in een wiskunde A-groep zijn bedolven.
Dat ik, als redelijk ervaren wiskunde B-docent, nog eens zou zeggen dat ook wiskunde C er mag zijn, had ik een aantal jaren geleden niet gedacht, ... maar ik kijk uit naar mijn volgende groep wiskunde C.



figuur 5 Vergelijking groep auteur – landelijk

Over de auteur

Winry 't Lam is docent wiskunde op het Sint Janslyceum te 's Hertogenbosch. E-mailadres: *w.t.lam@sjl.nl*.

ALLEEN REPRODUCEREN OF OOK WISKUNDIG DENKEN?

Anne van Streun
Jos Tolboom

De examenprogramma's wiskunde, zoals ingevoerd in augustus 2015, vragen in domein A3 aandacht voor wiskundige denkactiviteiten. Is daar ook iets van terug te vinden in de opgaven van de centrale examens wiskunde in het eerste tijdvak van 2017? Anne van Streun en Jos Tolboom zochten dat uit.

Waar gaat het over?

In de syllabi bij de centrale examens[1] wordt onderscheid gemaakt tussen *parate kennis*, *parate vaardigheden* en *productieve vaardigheden*. In dit artikel richten we ons alleen op de laatste twee, omdat examenvragen nooit een beroep doen op alleen maar parate kennis.

- Met *parate vaardigheden* worden de wiskundige basistechnieken bedoeld die de kandidaat routinematig moet beheersen.
- Bij *productieve vaardigheden* is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over parate vaardigheden en deze in complexe situaties kan toepassen. De *productieve vaardigheden* voert de kandidaat niet op routine uit. De kandidaat zal door *inzicht*, *overzicht*, *probleemaanpak* en *metacognitieve vaardigheden* een *strategie* moeten bedenken om het probleem op te lossen.

Wiskundige denkactiviteiten (WDA) (cTWO, 2007, 2012) - uit te splitsen in probleemoplossen, modelleren, abstraheren, logisch redeneren, formules manipuleren en ordenen en structureren - zijn een verdere uitwerking van die productieve vaardigheden en komen in beeld als de leerling geen kans ziet om op basis van parate kennis en vaardigheid een oplossingsmethode te reproduceren.
Drijvers (2015b) benadrukt in het wiskundig denken het drietal abstraheren, modelleren en probleemoplossen.
Wiskundeonderwijs waarin wordt volstaan met de VNO-didactiek (Voordoen-Nadoen-Oefenen) doet geen beroep op het activeren van wiskundig denken, maar heeft tot doel parate vaardigheden in te slijpen in de hoop dat leerlingen zonder *expliciet* inzicht, overzicht en probleemaanpak oplossingen kunnen reproduceren.
Het benadrukken van WDA in het curriculum heeft als doel om in het wiskundeonderwijs de verhouding tussen parate en productieve vaardigheden meer in balans te brengen. Als gevolg van het dogma dat leerlingen

zelfstandig het boek moeten kunnen doorwerken door sommen te liquideren is het evenwicht doorgeslagen naar de kant van het (onbegrepen) memoriseren van technieken. Opgaven waarover moet worden nagedacht houden alleen maar op en worden bij een volgende editie geschrapt of nog verder opgesplitst in deelopgaven. En zo wordt het niet-denken bevorderd.
Als handreiking en bronnenboek voor wiskundeleraren die wél werk willen maken van het bevorderen van wiskundig denken heeft SLO een drietal publicaties uitgegeven, waarin ter aanvulling op het schoolboek suggesties en voorbeelden worden aangereikt (Van Streun, 2014; Van Streun & Kop, 2016, 2017). Examenmakers staan intussen voor een dilemma. Enerzijds moet recht worden gedaan aan het programma, waarin duidelijk wordt gesteld dat leerlingen over productieve vaardigheden moeten beschikken. Anderzijds is een goede inzet van WDA in de voorliggende schoolboeken niet zomaar gerealiseerd en vraagt het van docenten mogelijk een andere focus in hun didactiek.

Worden WDA getoetst in de centrale examens?

De laatste jaren hebben wiskundeleraren tijdens tientallen workshops en studiedagen opgaven beoordeeld op hun geschiktheid om wiskundige denkactiviteiten te stimuleren. Een opgave die door de ene wiskundeleraar werd geclassificeerd als een standaardhandeling (routine, reproductie) werd door een collega beoordeeld als een echt probleem. Dat verschil in beoordeling heeft natuurlijk te maken met de eigen lespraktijk en met de inschatting van de parate vaardigheden, waar de leerlingen over moeten beschikken. Voor leerlingen die de parate vaardigheden onvoldoende beheersen zal een routinematig op te lossen opgave al snel een probleem zijn.
De vraag of een examenopgave inderdaad WDA toetst is niet eenduidig te beantwoorden als er geen overeenstemming is over het repertoire aan parate vaardigheden (Van Streun, 2014). In het vervolg bespreken wij uit elk examen enkele opgaven, die volgens onze inschatting een wiskundige denkactiviteit vereisen om tot een goede oplossing te komen. Daarnaast geven wij aan waarom sommige opgaven, die wellicht slecht zijn gemaakt door leerlingen, toch geen WDA toetsen.

Wiskunde A vwo pilot 2017-I [2]

Zonnepanelen

De eerste vier opgaven gaan over de aanschaf en terugverdientijd van zonnepanelen. Voor de beantwoording van de vierde vraag moet de leerling uit twee pagina's tekst de relevante gegevens selecteren en daarna een formule opstellen. Dat is op te vatten als een eerste stap in het modelleren van een probleemsituatie en vereist zeker het nodige zoek- en denkwerk. De vereiste parate vaardigheden zijn minimaal en in de vorige vraag is een vergelijkbare formule gegeven. De relevante gegevens zijn voor de lezer hierna al uitgelicht, zie figuur 1.

Voor het vervolg van deze opgave gaan we **niet** meer uit van een jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs maar van een **vaste** prijs van € 0,225 per kWh.
In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een ander bedrijf.

tabel

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie[2)] van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

Als je de panelen zelf installeert, is de aanschafprijs lager. De aanbieder rekent dan € 1300 vaste kosten voor het systeem en € 325 per paneel. De elektriciteitsopbrengst van de panelen verandert niet bij een doe-het-zelfsysteem.
Voor de aanschaf van 9 panelen of minder van een doe-het-zelfsysteem geldt een andere formule omdat de overheidssubsidie dan 15% van de aanschafprijs is. De aanschafprijs bestaat uit de vaste kosten plus de kosten per paneel.

4p **4** Stel een formule op voor de terugverdientijd T in jaren en x het aantal zonnepanelen voor $x \leq 9$.

figuur 1

Formule van Riegel en kilometertijden

Deze probleemsituatie komt ook voor in het reguliere examen. Vraag 12 toetst inzicht in de relatie tussen de tekst en de formule, gevolgd door een geschikte manipulatie. Dat doet een beroep op *symbol sense*, een wiskundige denkactiviteit. Leerlingen die hebben geleerd om een probleem systematisch aan te pakken, kiezen voor een getallenvoorbeeld en berekenen daarmee het percentage, zie figuur 2.

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. Die formule luidt als volgt:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1,07}$$

T_1 is de tijd, uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2. De afstanden d_1 en d_2 zijn allebei in meters. De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42 195 meter, de marathon.

Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Dat is ook in overeenstemming met de formule: als de afstand tweemaal zo groot wordt, dan geldt volgens de formule van Riegel dat de gemiddelde snelheid altijd met hetzelfde percentage afneemt.

5p **12** Bereken dit percentage.

figuur 2

Moeilijk en toch geen WDA: Zentrum Paul Klee

Een drietal opgaven gaan over goniometrische formules waarmee moet worden gerekend of die moeten worden opgesteld. Waarschijnlijk niet zo goed gemaakt, maar ze doen geen beroep op een wiskundige denkactiviteit. Het is direct duidelijk wat er moet gebeuren, maar de vereiste parate vaardigheid is complex en zal allicht niet door veel leerlingen worden beheerst. Of zal het met het nieuwe programma beter gaan dan voorheen?

Pi in het oude India

Nadat de leerlingen in opgaven 18 en 19 wat hebben gerekend aan (de formule van) een rij, moeten zij in opgave 20 zelf een recursieve formule opstellen, zie figuur 3. Dat doet zeker een beroep op *symbol sense* en zou niet misstaan op een examen wiskunde B vwo!

Madhava gaf ook een andere benaderingsaanpak. Hierbij leidde de somrij sneller tot een goede benadering van π dan bij zijn eerste methode. Ook bij die andere aanpak werd er beurtelings iets afgetrokken en iets opgeteld.
Die andere aanpak van Madhava zag er als volgt uit:

$$S_1 = \sqrt{12} \cdot 1$$
$$S_2 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right)$$
$$S_3 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2}\right)$$
$$S_4 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right)$$
$$S_5 = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}\right)$$

enzovoort.

5p **20** Stel de recursieve formule op voor de somrij S_n met $n = 2, 3, 4, \ldots$ en $S_1 = \sqrt{12}$ van de andere benaderingsaanpak van Madhava.

figuur 3

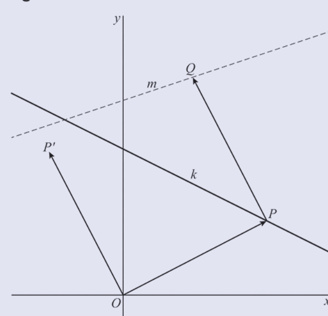
Wiskunde B vwo pilot 2017-I

Bewegen over een lijn

Deze opgave, zie figuur 4, doet een beroep op 'nieuwe' parate vaardigheden, maar vereist ook een goede analyse van de situatie en het bedenken van een strategie om tot een oplossing te komen.

Gegeven is lijn k met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Op deze lijn ligt het punt P.
Vector $\overrightarrow{OP}$ wordt om de oorsprong over 90° linksom gedraaid. Zo ontstaat vector $\overrightarrow{OP'}$.
Vector $\overrightarrow{PQ}$ heeft dezelfde richting en dezelfde lengte als $\overrightarrow{OP'}$.
Zie de figuur.

figuur



Wanneer het punt P over lijn k beweegt, zal het punt Q over een lijn m bewegen. In de figuur is m gestippeld weergegeven.

4p **2** Stel een vergelijking van lijn m op.

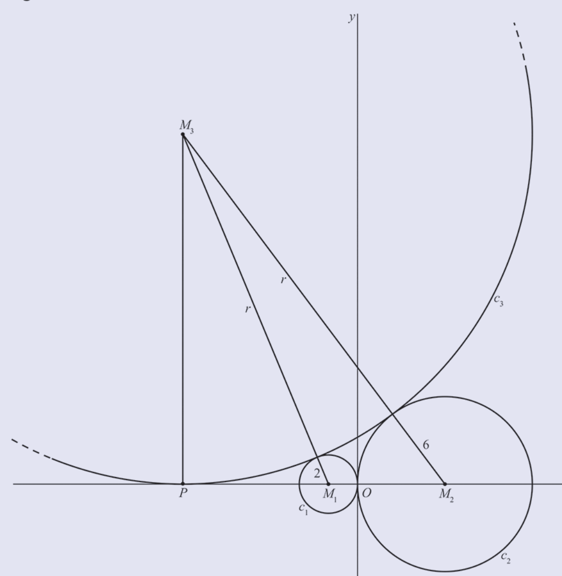
figuur 4

Derde cirkel

In opgave 5 moet veel worden gerekend met de stelling van Pythagoras. Het vereist een goede probleemaanpak om niet te verdwalen in alle vergelijkingen, zie figuur 5. Het correctievoorschrift geeft vier verschillende oplossingsmethoden.

Er is één waarde van r waarvoor c_3 niet alleen raakt aan c_1 en c_2, maar ook aan de x-as. In figuur 3 is deze situatie weergegeven, waarbij cirkel c_3 voor een deel is getekend.
Cirkel c_3 raakt de x-as in punt P.

figuur 3



6p **5** Bereken exact de waarde van r in deze situatie.

figuur 5

Achtbaan

In vraag 8 moeten de leerlingen eerst bedenken wat de helling van PQ is, waarna ze die goniometrische expressie moeten herleiden, zie figuur 6. Dat herleiden zal een parate vaardigheid moeten zijn en de eerste stap lijkt vanzelfsprekend, hoewel de probleemsituatie wellicht enige verwarring kan veroorzaken.

De baan van een punt P wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(t) \end{cases}$$ met t in seconden en x en y in meter.

Een punt Q maakt dezelfde beweging als P, maar Q loopt π seconden vóór op P.

De bewegingsvergelijkingen van Q zijn dan:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t+\pi) + \sin(2(t+\pi)) \\ y(t) = 2\cos(t+\pi) \end{cases}$$

Als $t = \frac{1}{2}\pi$ en als $t = \frac{3}{2}\pi$, vallen P en Q samen. Op alle andere tijdstippen is er sprake van een lijnstuk PQ.

4p **8** Bewijs dat de helling van lijnstuk PQ onafhankelijk van t is.

figuur 6

Wiskunde C vwo pilot 2017-I

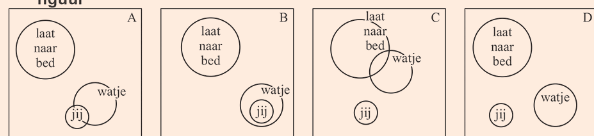
In de probleemsituaties is veel overlap met die in het wiskunde A-pilotexamen. De opgaven zijn ten opzichte van dat examen soms wel vereenvoudigd, bijvoorbeeld door formules te geven in plaats van ze te laten opstellen. De volgende opgave wordt door de pilotleraren als een WDA beoordeeld, zie figuur 7.

De rechtenstudenten kregen de opdracht om ook bij de volgende redenering te onderzoeken of deze geldig of ongeldig was:

Redenering II
'Als je een watje bent, dan ga je niet laat naar bed.
Jij gaat niet laat naar bed, dus jij bent een watje.'

Slechts 28 procent van de eerstejaars rechtenstudenten gaf het juiste antwoord. Eén van de volgende Venn-diagrammen is geschikt om te onderzoeken of redenering II geldig is of niet.

figuur



3p 13 Welk Venn-diagram is geschikt om te onderzoeken of redenering II geldig is of niet? Licht je antwoord toe.

figuur 7

Havo centrale examens wiskunde 2017-I

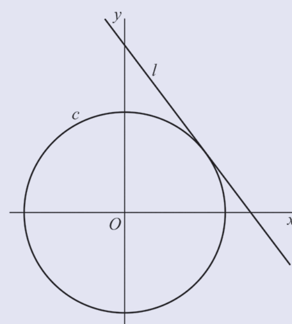
De examens havo wiskunde A en B van 2017 vallen al onder het regime van de nieuwe examenprogramma's. Het B-examen wordt elders in dit nummer van *Euclides* besproken. Op verzoek van de redactie zetten we even de WDA-bril op en geven onze impressie van beide examens.

Wiskunde B havo 2017-I

Over dit examen heerst onder de deelnemers aan de landelijke examenbespreking behoorlijke tevredenheid. Onder een deel van de gemeenschap van het wiskunde-onderwijs ontstond er een vrees voor te sterke nadruk op algebraïsche vaardigheid toen in het curriculum havo wiskunde B het domein Meetkundige berekeningen werd opgenomen. Maar in de pilotexamens zijn de afgelopen jaren behoorlijk wat opgaven opgenomen die de leerdoelen van dit domein zodanig operationaliseren dat er daarnaast een beroep wordt gedaan op synthetisch denken en probleemaanpak. In de tweede opdracht die we hieronder bespreken is dat ook het geval.

De cirkel c en de lijn l worden gegeven door $c: x^2 + y^2 = 9$ en $l: y = -\frac{4}{3}x + 5$. Zie figuur 1.

figuur 1



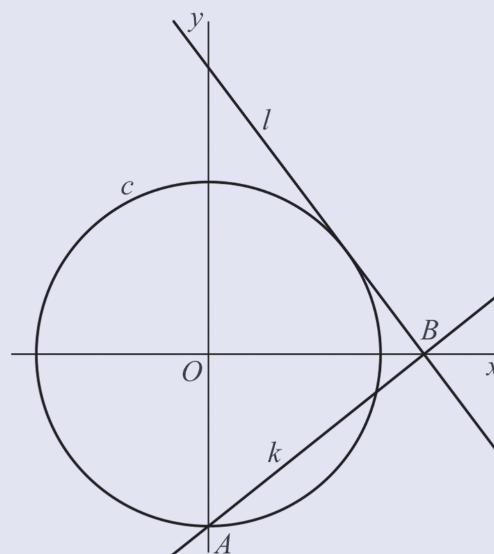
4p 1 Toon aan dat l raakt aan c.

figuur 8

Cirkel en lijn

De eerste opgave van dit examen, zie figuur 8, is niet eenvoudig omdat er nog redelijk wat rekenstappen vereist zijn, maar zou leerlingen niet voor problemen moeten stellen, omdat de probleemstelling (heeft deze lijn een raakpunt aan deze cirkel?) bekend is. Daarom categoriseren we deze opgave als 'parate vaardigheid'.

Maar dat ligt anders bij de tweede opgave. De probleemsituatie is als volgt: Cirkel c snijdt de negatieve y-as in het punt A. Lijn l snijdt de x-as in het punt B. De lijn k is de lijn door A en B, zie figuur 9.



figuur 9

Vraag 2 luidt dan: Lijnen k en l lijken elkaar loodrecht te snijden. Onderzoek of dit het geval is. Een goed antwoord en ondersteunend onderzoek zijn 6 punten waard. Het correctievoorschrift onderscheidt drie verschillende aanpakken, elk werkend vanuit een andere basisgedachte om loodrecht snijden te toetsen:

- Twee lijnen snijden elkaar loodrecht dan en slechts dan als het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1.
- Is er een geschikte driehoek rondom B (het snijpunt van k en l) te vinden, waarop de stelling van Pythagoras kan worden toegepast?
- Bepaal de vergelijking van een loodlijn door A op l en onderzoek of deze lijn de lijn k in het punt B snijdt.

Alleen al het feit dat er drie fundamenteel verschillende probleemaanpakken mogelijk zijn, toont in onze ogen aan dat dit een interessante meetkundige probleemstelling is. Voor het goed uitvoeren van deze opgave is dus een *productieve vaardigheid* nodig. In onze ogen is er hier sprake van de WDA 'probleemoplossen'.

Wiskunde A havo 2017-I

Dit examen werd als tamelijk moeilijk en lang voor de doelgroep ervaren. Gegeven het feit dat er 80 scorepunten te verdelen waren over 22 opgaven (in zes probleemsituaties) concluderen wij dat er weinig ruimte was voor grote opdrachten, met een behoorlijk aantal scorepunten per opgave. Terwijl een grote opdracht de mogelijkheid biedt om de aanpak van complexere problemen bij leerlingen te toetsen.
Het examen eindigt wel met een complexe opdracht. In vraag 22 wordt in een staafdiagram/lijndiagram het aantal inwoners per bioscoop per Nederlandse provincie gegeven. Deze informatie moet worden gecombineerd met het aantal bioscoopbezoeken per provincie in 2012 om de stelling: 'In de provincie met de meeste bioscopen per inwoner is het gemiddeld aantal bioscoopbezoeken per inwoner meer dan 2' op waarheid te toetsen. Om dit goed uit te voeren zijn zeven denkstappen te onderscheiden. Deze stappen zullen voor deze doelgroep niet meteen duidelijk zijn. De basisstrategie (het moeten omrekenen van het aantal inwoners per bioscoop naar het aantal bioscopen per inwoner) is niet standaard. Daarom vinden wij dat deze opgave van de leerlingen *productieve vaardigheid* vraagt. Als WDA bevindt de opgave zich in de categorie 'Ordenen en structureren', maar ook in de categorie 'Probleemoplossen'.

Moeilijk, maar toch geen WDA: studieschuld

Opgave 13 luidt als volgt: In 2012 bedroeg de prestatiebeurs voor een uitwonende student € 266,23 per maand. Daarover werd elke maand rente berekend, zodanig dat het jaarlijkse rentepercentage 1,39% was. Bereken het maandelijkse rentepercentage in drie decimalen nauwkeurig.
In principe is dit een probleemsituatie die leerlingen al een behoorlijk aantal keer zijn tegengekomen voordat zij hem zo op dit examen geformuleerd kregen. De probleemaanpak is dus niet nieuw. Maar door de lastige (maar wel authentieke) getallen waarmee moet worden gerekend denken wij dat deze opgave rondom exponentiële groei toch niet op een hoge p-waarde kan rekenen.

Conclusie

De centrale examens wiskunde uit het eerste tijdvak van 2017 bevatten wiskundige opdrachten vanuit veelal authentieke probleemsituaties (Wijers, Jonker, & Kemme, 2004). Dat in die probleemsituaties vaak gebruik wordt gemaakt van gegevens van enkele jaren oud hoort bij de prijs van een zorgvuldige examenconstructie.
In alle centrale examens van het eerste tijdvak 2017 bieden deze probleemsituaties op een natuurlijke manier een kans om het wiskundig denken (Devlin, 2012; Drijvers, 2015a) van de kandidaten te toetsen. Of deze examens ook voldoende wiskundig denken bevatten is wat ons betreft inzet van een discussie die de gemeenschap moet blijven voeren. Dit uiteraard in het licht van de beoogde balans met de andere doelen van het curriculum, bijvoorbeeld het toetsen van algebraïsche vaardigheid.

Noten

[1] Zie *www.examenblad.nl/*
[2] Voor een bespreking van alle examens, zie *www.nvvw.nl/23743/examens*

Literatuur

– cTWO. (2007). *Rijk aan betekenis*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
– cTWO. (2012). *Denken & doen; wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
– Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*. Palo Alto, CA: Keith Devlin.
– Drijvers, P. (2015a). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
– Drijvers, P. (2015b). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides, 90*(4), 4-8.
– Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten; Implementatie examenprogramma's havo-vwo 2015*. Enschede: SLO.
– Van Streun, A., & Kop, P. (2016). *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten; bovenbouw havo-vwo.* Enschede: SLO.
– Van Streun, A., & Kop, P. (2017). *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten; onderbouw havo-vwo.* Enschede: SLO.
– Wijers, M., Jonker, V., & Kemme, S. (2004). Authentieke contexten in wiskundemethoden in het vmbo. *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen, 21*(1), 1-19.

Over de auteurs

Anne van Streun is emeritus-hoogleraar didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen. E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*
Jos Tolboom is leerplanontwikkelaar wiskunde en informatica, afdeling tweede fase havo/vwo bij SLO, nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling.
E-mailadres: *j.tolboom@slo.nl*

VASTGEROEST

EEN RAADSEL

Ab van der Roest

Columnist Ab van der Roest verbleef een jaar in China. Ook daar had hij mooie observaties van wiskunde als menselijke activiteit. Inmiddels is Ab weer terug, maar de rubriek doet zijn naam nog even eer aan. Deze keer wordt Ab gefascineerd door een leerling die van raadsels houdt.

結皮

Zijn raadsels gelijk te stellen aan wiskunde? Die vraag stelde ik mezelf toen Lucas me een raadsel wilde voorleggen. De oorzaak van de vraag was de vader van Lucas, want hij reageerde met de woorden: 'Pas op hij is een wiskundeleraar.' Een goed raadsel heeft zeker wiskundige kenmerken. Je moet logisch nadenken en er moet een eenduidig antwoord zijn.
Lucas is een jongen van tien jaar die ik in China ontmoette. Hij volgt thuisonderwijs en heeft grote belangstelling voor raadsels. Die belangstelling wordt misschien wel mede veroorzaakt door het thuisonderwijs, omdat er ruimte is in het lesprogramma en om zelf na te denken over wat hij allemaal wil leren.
Het raadsel een beetje aangepast in mijn woorden:

Vier mensen moeten in het donker een zeer woeste rivier oversteken. Er ligt een bouwvallige brug. Gelukkig hebben ze een zaklantaarn om de slechtste plekken te zien. De brug is zo slecht, dat er maar twee mensen tegelijk op de brug kunnen en de oversteektijd is beperkt. Helaas is er maar één zaklantaarn. Het tempo waarin de mensen kunnen bewegen verschilt nogal. Persoon *A* doet er 10 minuten over, persoon *B* doet er 5 minuten over, persoon *C* doet er 2 minuten over en persoon *D* heeft slechts 1 minuut nodig. Ze krijgen 17 minuten de tijd om over de brug te komen, maar pas op, de zaklantaarn moet altijd bij een persoon op de brug zijn en het tweetal dat op de brug is, moet bij elkaar blijven.

Ik wist het antwoord niet meteen. Eerlijk gezegd had ik een grote aanwijzing nodig om het antwoord te geven. Als je het raadsel nog nooit hebt gezien, moet je er nu maar even over nadenken. Aan het eind zal ik het antwoord geven.
Dit raadsel is zeker wiskundig. Ik voeg het toe aan mijn repertoire. Ik zal het dan ook het raadsel van Lucas noemen. Prima voor een les over nadenken. Ik dacht in een bepaalde richting, en kon die niet loslaten. Ik had opnieuw moeten beginnen, maar het lukte me niet. Toen de vader me een tip gaf, was ik meteen op de goede weg. Terugdenkend aan dit voorval realiseerde ik me dat ik bijgeschoold werd in probleem oplossen. (Misschien kan ik het wel opnemen in het lerarenregister.) Als je vastloopt, probeer dan een andere route. Lukt het nog steeds niet, ga dan elkaar helpen door over het probleem te praten.
Veel collega's fleuren de lessen al op met vraagstukken en raadsels. Als inleiding op een onderwerp of soms zo maar om de tijd te vullen. Zeker geen verloren tijd, omdat leerlingen nieuwsgierig gemaakt worden en actief aan het denken worden gezet.

Oplossing

Eerst gaan *C* en *D* samen naar de overkant en gaat bijvoorbeeld *C* terug. Dit kost 4 minuten. *D* is dan overgestoken en *A*, *B* en *C* zijn nog aan de eerste zijde. Vervolgens gaan *A* en *B* samen naar de overkant. Dit kost 10 minuten en in 14 minuten zijn *A*, *B* en *D* overgestoken. Nu gaat *D* terug om *C* op te halen wat 3 minuten tijd kost. In totaal gebruiken ze dus precies 17 minuten.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. Vorig schooljaar verbleef hij voor een jaar op de MSG te Kunming, China.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

GETUIGEN

LANDMEETKUNST

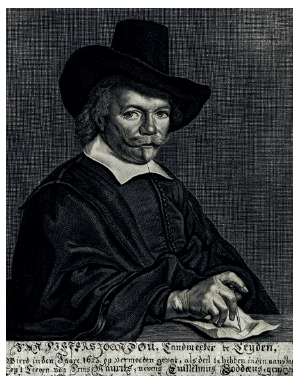
Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee over het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



Een lust voor het oog

In de Top 2000 fraaiste meetkundeboeken, mocht die er ooit komen, verdient *De Practijck des Landmetens* dat Johan Sems (1572-1635) en Jan Dou (± 1572-1635) rond 1600 publiceerden zonder meer een plek bij de eerste tien. Sems en Dou schreven het boek ten behoeve van de Nederlandstalige wiskundeopleiding aan de universiteit Leiden. Die opleiding was, met een programma dat geïnspireerd was op de wiskundelessen van Stevin, in 1600 in het leven geroepen. De twee landmeters hadden geen enkele ervaring in het docentschap. Beiden hadden er wel al enige jaren veldwerk op zitten, kenden elkaar al geruime tijd en ze waren (samen?) in de leer geweest bij Simon van Merwen (1548 - 1610), die de lessen aan de ingenieursschool ging verzorgen. De start van die opleiding was de directe aanleiding voor het schrijven van dit boek.



figuur 1 Jan Pieterszoon Dou (± 1572 - 1635), gravure van Reinier van Persijn

Eén van de redenen dat dit boek een plek in de top tien verdient, zijn de prenten. De prachtige, in sommige edities handgekleurde prenten (deels hergebruikt op het titelblad) maken het boek een lust voor het oog. In verschillende edities van het boek zitten kleine variaties in de tekst, en er is een aantal collaties met andere uitgaven bekend, vooral met de indertijd beroemde *Hondert geometrische questiën*, dat voor veel rekenmeesters een standaardwerk was. In de een of andere vorm leerden vrijwel alle zeventiende-eeuwse landmeters het vak uit de katernen van het boek van Sems en Dou.



figuur 2 Johan Sems (1572 - 1635) zelfportret rond 1600

Roeden, voeten en duimen

Het boek bestaat uit drie delen. In het eerste deel behandelden de auteurs een amalgaam van allerlei basisvaardigheden. Zowel definities van meetkundige figuren als het rekenen met oppervlakte- en lengtematen. Die lengtematen waren niet tientallig onderverdeeld, en bovendien verschilden ze van streek tot streek, dus hoewel basisrekenvaardigheid bekend werd verondersteld, herhaalden Sems en Dou het rekenen met roeden, voeten en duimen in verschillende verdelingen: 10, 12, 14 of 16 duimen in een voet etcetera. Vervolgens behandelden ze ook het rekenen met vierkante roeden en duimen met verscheidene onderverdelingen. Speciale aandacht ging uit naar het worteltrekken.
Verschillende landmeetinstrumenten werden uitvoerig beschreven, om vervolgens te worden ingezet in de beschrijving van het meetklaar maken van land. Dat gebeurde door middel van het uitzetten van rechthoekige driehoeken, gebruik van gelijkvormigheid, meten van cirkels en het vinden van het middelpunt, met behulp van een *rechtkruijs* en een landmetersketting. Hier en daar gebruikten de auteurs een (al dan niet expliciete) verwijzing naar Euclides. Bijvoorbeeld bij de oprichting van een loodlijn door middel van de constructie van een gelijkzijdige driehoek en met behulp van een aantal Pythagoras-drietallen. Bij het trekken van een evenwijdige lijn door een gegeven punt buiten een gegeven lijn, gebruikten ze echter een 'op het oog' constructie. Het eerste deel eindigde met het leren meten en uitzetten van hoeken op het land.

Oppervlakte

Het tweede deel van de *Practijk* ging vervolgens over de daadwerkelijke meting en de bijbehorende berekening van de oppervlakte. Na een begin over de idee van oppervlaktebepaling van rechthoeken, driehoeken en tot slot, veelhoekige figuren, komt een intermezzo waarin de constructie van een goniometrische tabel wordt uitgelegd. De tabel bevat in hoekstappen van 3 minuten de sinus van de verschillende hoeken en de oppervlakte van het bijbehorende cirkelsegment. Omdat de sinus in de definitie van die tijd geen verhoudingsgetal was, maar de lengte van een lijnstuk, was het in alle berekeningen nodig om de straal van de cirkel (in de tabel van Sems en Dou gesteld op 10.000.000) te verdisconteren. Het voorkwam ook een tabel die vol stond met breuken – Sems en Dou gebruikten bij voorkeur gehele getallen. In het vervolg van dit tweede deel van de *Practijk* werd het gebruik van de tabel uitvoerig toegelicht, in allerlei berekeningen in drie- en veelhoeken. Tot slot werden oppervlaktes bepaald van stukken land waarvan de omtrek eerst door middel van rechte lijnen en cirkelbogen benaderd moest worden. De bepaling van de oppervlakte van een aantal maantjes waren daarvan het eenvoudigste voorbeeld.



figuur 3 Johan Sems en Jan Dou, *Practijck des Lantmetens* (1600). © KB Den Haag

Land verdelen

Het derde deel van het boek, ten slotte, ging over de verdeling van stukken land in gelijke (of ongelijke) stukken. Dat gebeurt op verschillende manieren: door middel van rechte lijnen vanuit één gegeven punt maar ook door middel van evenwijdige lijnen en ook met de eis dat alle stukken land toegang hebben tot één van de zijden van het land. Uit de opdrachten is duidelijk dat het gaat om land te verdelen zodanig dat alle eigenaars toegang hebben tot een weg of sloot, of zo dat iedereen een put kan bereiken.

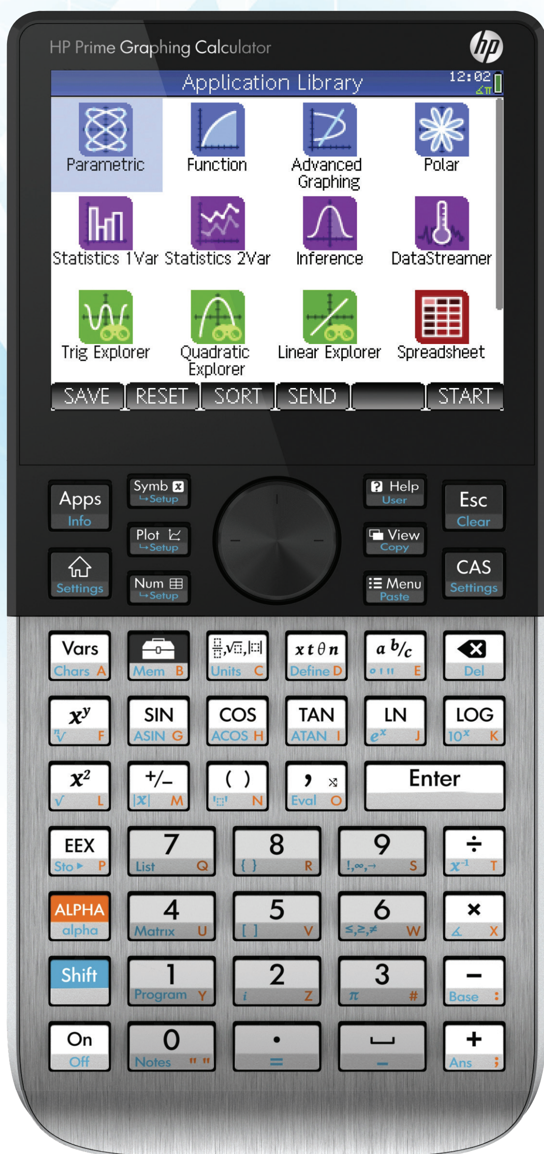
Bewijzen of vertrouwen?

Bewijsvoering kwam weinig voor. Af en toe treft men een verwijzing naar Euclides, maar de regels die worden geboden, zelfs als het eenvoudige rekenkundige bewerkingen betreft, zijn eerder obscuur dan verhelderend geformuleerd. Daar waren twee redenen voor. Op de eerste plaats bood het docenten tijdens hun lessen de mogelijkheid om punten toe te lichten en te verhelderen. Of elke docent dat ook deed is natuurlijk de vraag, maar dat was het kwaliteitsverschil tussen docenten. In het boek werden zaken soms opzettelijk obscuur geformuleerd, omdat men daarmee kon lezen dat de auteur het wel wist, het was dus tevens een vorm van reclame voor de lessen van de auteur. Daarnaast was wiskunde ook op de eerste plaats een praktisch vak, waarbij de bewijsvoering minder relevant was dan het vertrouwen dat de wiskundige genoot. Sems en Dou genoten dat vertrouwen. Althans, dat straalden zij uit door op een paar punten in hun boek ook te waarschuwen tegen het gebruik van een *valsche regel* en als argumentatie daarbij te verwijzen naar het oordeel van *alle verstandighen in dese konst*.

Het landmeetkundeboek van Sems en Dou, of je het nu wel of niet een plek in de top 10 gunt, illustreert veel typische zaken uit de periode rond 1600: van de gangbare praktijken in het landmeten, tot de rol van vriendjes-politiek in de benoemingen aan de universiteit en het gebruik van lesboeken aldaar. Maar waar ik hier de nadruk op heb willen leggen is dat wiskunde – of datgene wat wij als wiskunde onderwijzen – een uitermate rekbaar begrip is. Landmeetkunde is in dit boek een zeer praktisch vakgebied. Natuurlijk is het deels te wijten aan de (veronderstelde) vooropleiding van studenten dat allerlei rekenregels en elementaire meetkunde werden behandeld, maar de regels in de landmeetkunde, naast dat ze houvast boden aan de beginnende student, illustreren eerst en vooral dat het praktische resultaat belangrijker werd gevonden dan de bewijsvoering. Dat gelijktijdig aan de universiteiten de aandacht voornamelijk uitging naar de bewijsvoering in de Euclidische meetkunde, geeft aan hoe verschillend de ideeën over wiskundeonderwijs in één tijdvak kunnen zijn – of vertel ik nu niets nieuws?

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl.*

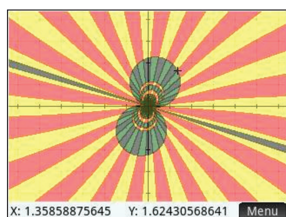


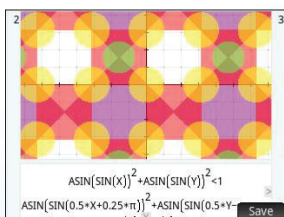


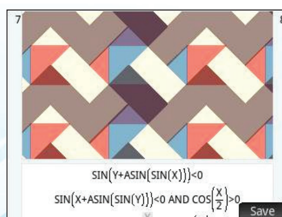
New Body & New Brain

HP Prime

- **SNELLER**
  door 100x meer rekenkracht
- **INTUÏTIEVER**
  door hoge resolutie touchscreen
- **HANDIGER**
  door menu met apps
- **VEILIGER**
  door CvTE-goedgekeurde examenstand met 3 LEDs en (optioneel) extra wachtwoord, starten met 1 druk op knop
- **GOEDKOPER**
  door gratis emulator software
- **TOEKOMSTGERICHT**
  door aanwezigheid van CAS en programmeer-mogelijkheden









De HP Prime kost voor uw leerlingen hetzelfde als wat ze nu gewend zijn, maar ze krijgen zoveel meer. Download nu al de app in de Apple, Windows of Android Store om kennis te maken met de Prime. Bij een workshop krijgt u als docenten uw eigen model van ons cadeau.

Voor meer informatie gaat u naar:

www.hp-prime.nl

of neem contact op via **info@hp-prime.nl**

KLEINTJE DIDACTIEK

ONGELIJKHEDEN OPLOSSEN

Bij het oplossen van ongelijkheden stuitte ik onlangs op een probleem bij een leerling uit 3 havo. Deze leerling heeft vermoedelijk Asperger. Hij begrijpt de wiskunde doorgaans vlot, maar liep deze keer vast op de betekenis van het kleiner dan (<) of groter dan (>) teken in een ongelijkheid in combinatie met de betekenis daarvan in de grafiek.
In de opgave was een kwadratische ongelijkheid gegeven en een schets van de bijbehorende grafieken. Doorgaans is de volgende aanpak effectief om het oplossen van de ongelijkheid te leren begrijpen:
Ik leer ze dat het oplossen van een ongelijkheid in drie stappen gaat: VPO – vergelijking (oplossen) – plaatje (maken) – oplossing (aflezen). Met dank aan oud-collega Anna Rijnten voor de afkorting.
Ik laat de grafiek kleuren die onder de andere ligt (bij kleiner dan) en vervolgens ook het deel van de *x*-as dat daarbij hoort. Een deel van de leerlingen heeft hieraan voldoende.
Ik laat bij de formules die links en rechts van het ongelijkheidsteken staan een tabel maken. Vervolgens koppelen we die tabel aan de schets of maken zelf een grafiek (deze koppeling is lang niet altijd aanwezig!). Tot slot vergelijken we de *y*-waarden uit de tabel en bepalen we voor welke *x*-waarden de ongelijkheid geldt. En die kennis koppelen we weer aan de schets van de grafieken. Het merendeel van de leerlingen heeft hieraan voldoende.
Voor deze leerling was deze aanpak niet toereikend. Na flink doorvragen bleek dat de woorden *kleiner dan* voor hem een andere betekenis hadden dan voor mij als wiskundedocent. Bij kleiner dan denkt hij aan een voorwerp of persoon die in alle afmetingen kleiner is, dus in volume kleiner of in hoogte kleiner (als het ware dwars op het papier langs een denkbeeldige *z*-as).
Kleiner dan heeft dus een driedimensionale betekenis voor deze leerling en is gekoppeld aan afmetingen. Een lijn (met een dikte) kan zodoende nooit kleiner zijn dan een andere lijn (met diezelfde dikte).
Zodra dit helder werd, ben ik *kleiner dan* voor deze leerling gaan benoemen als: dit betekent dus dat de grafiek *lager* of *onder* ligt. Bij deze leerling was het woord *lager* het beste omdat *onder* eigenlijk ook niet kon; dat zou onder het papier zijn (dus ook weer langs een *z*-as gedacht). Vanaf dat moment ben ik *kleiner dan* consequent gaan benoemen als: dat betekent hier dus *lager liggend dan...* en evenzo *hoger liggend dan* bij *groter dan*. Ik heb de begrippen kleiner dan en groter dan niet vermeden, want dat zou geen zin hebben. Volgend jaar en tijdens een vervolgopleiding heeft deze leerling immers weer andere docenten.
Hoewel dit een heel specifiek voorbeeld is van een leerling met vermoedelijk Asperger (en binnen die groep zijn eveneens grote verschillen) vermoed ik dat ook voor sommige andere leerlingen verwarring over de betekenis van *kleiner dan* in een schets van grafieken, een oorzaak kan zijn voor fouten in het oplossen van ongelijkheden. Zowel in 3 havo als in 3 vwo vinden leerlingen het aflezen van de oplossing vaak een lastige stap (en ook daarna nog bij wiskunde A of C). Graag hoor ik van lezers of het anders benoemen van *kleiner dan* heeft geholpen en welke woorden voor jullie leerlingen het beste werkten. Of misschien was alleen de discussie erover al voldoende?

Lonneke Boels

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2017

TWEEDE UITNODIGING

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 4 november 2017**.
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.00 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal

Thema van de studiedag: WISKUNDE uit de KUNST
Zowel wiskundigen als kunstenaars raken snel gefascineerd door structuren, patronen en wetmatigheden. De combinatie wiskunde en kunst ligt voor de hand, maar heeft binnen de schoolwiskunde nog niet echt een plek veroverd. Tijdens deze studiedag wordt gekeken naar de mogelijkheden om wiskunde en kunst in de klas te combineren. Denk bijvoorbeeld aan de rol van wiskunde in vlakvullingen, muziek en architectuur, maar ook aan wiskunde met rap, animaties en 3D-printen. Kunstige contexten kunnen aanleiding zijn voor leerlingen om zich op een creatieve manier in een wiskundig onderwerp te verdiepen. Tenslotte is goede wiskunde geen wetenschap maar kunst: Wisconst! De relatie tussen wiskunde en kunst is spannend en soms gespannen. Wat is de verhouding tussen vaardigheid en creativiteit? En hoe verhouden zich didactische ideeën uit beide disciplines? Oefening baart vanzelf kunst? Tijdens deze studiedag laten we ons vooral door kunst inspireren. Daarbij denken we ook aan onderwerpen als wiskunde met kunstjes, wisconst van vroeger (Stevin e.a.) en de kunst van het onderwijzen van wiskunde. Wil je zelf een workshop geven over dit thema of misschien wel over een heel ander onderwerp, mail dan naar Lidy Wesker-Elzinga (*l.wesker@nvvw.nl*) of Michiel Doorman (*m.doorman@nvvw.nl)* voor je bijdrage aan de inhoud van dit programmaonderdeel van deze dag.

Agenda jaarvergadering



10.00-11.00 uur – **Jaarvergadering**
1. Opening door de voorzitter, de heer S. Garst
2. Jaarrede van de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2016
4. Jaarverslagen 2016/2017 van de NVvW en van *Euclides*
5. Jaarrekening en balans 2016/2017, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. Aftredend zijn: Ebrina Smallegange en Kees Garst. Zij stellen zich beiden herkiesbaar voor een tweede termijn. Ook onze voorzitter, Swier Garst, treedt af, maar stelt zich niet herkiesbaar (zoals bij zijn aantreden was afgesproken). Het bestuur nodigt leden van harte uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*). Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden. In het bijzonder worden leden die werkzaam zijn in de onderbouw van het voortgezet onderwijs uitgenodigd zich kandidaat te stellen.
7. Rondvraag
8. Sluiting van de jaarvergadering

Programma studiedag

11.00 – 11.15 Inleiding op de studiedag
11.15 – 12.00 Plenaire lezing
12.00 – 12.15 Pauze
12.15 – 13.05 Workshopronde 1A/lunch en markt
13.05 – 13.15 Wisseltijd
13.15 – 14.05 Workshopronde 1B/lunch en markt
14.05 – 14.15 Wisseltijd
14.15 – 15.05 Workshopronde 2
15.05 – 15.15 Wisseltijd
15.15 – 16.00 Plenaire voordracht en afsluiting

Iedereen volgt een workshop in ronde 1A óf 1B. De tijdsindeling van de studiedag biedt deelnemers ruim gelegenheid voor lunch en marktbezoek.

LIO-dag

Al enige jaren is de LIO-dag een succesvolle traditie geworden: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name de lio's. De lio's krijgen in september via hun opleider meer informatie.

Nieuwe leden

De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dat vindt plaats met een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit voor de jaarvergadering/studiedag. In de loop van oktober ontvangen zij hiervoor een persoonlijke uitnodiging via de mail.

Kosten

De studiedag is gratis voor leden.
Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 80,00. Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2017, inclusief alle faciliteiten, waaronder zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen.
Ook studenten zijn welkom, zij betalen € 40,00 (mits ze niet ouder zijn dan 27 jaar). Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00.
Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!

Aanmelding

Aanmelden kan vanaf half september, tot **21 oktober 2016**.
Voor de organisatie is het van belang dat u zich op tijd aanmeldt.
Ook dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de site van de vereniging. Daarop staat het volledige programma, inclusief de workshops waar u een keuze uit kunt maken. Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen en geeft ook aan hoe u kunt betalen.

	Zonder lunch	Met lunch
Lid	gratis	€ 10,00
Niet-lid	€ 80,00	€ 90,00
Student (niet ouder dan 27 jaar en niet lid)	€ 40,00	€ 50,00

De plaatsing in werkgroepen gaat op volgorde van binnenkomst en vol = vol.
Zoals vorig jaar wordt de indeling een paar dagen voor de studiedag op de site gepubliceerd; aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens.

Markt

Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar u uw hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes. Er is zowel een commercieel als een niet-commercieel deel. Verantwoordelijk voor deze markt is Ruud Jongeling (e-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*)

Certificaat

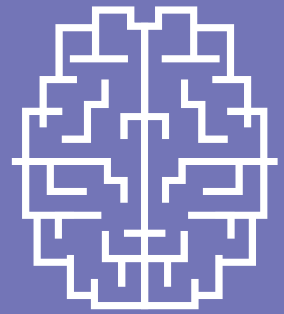
De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken, die u kunt gebruiken voor *www.registerleraar.nl*. Wilt u een certicifaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum. Het certificaat wordt u na afloop van de studiedag digitaal toegestuurd.

Informatie

Verantwoordelijk voor de organisatie en contactpersoon van deze dag is Heleen van der Ree (e-mailadres: *hoofdbureau@nvvw.nl*).

PUZZEL 93-1

DOELLOOS



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Volgens de titel is deze puzzel zonder doel, dus zonder bekende toepassing. Het doel is echter nul en dat is zeker in de wiskunde niet niks. We gaan namelijk onderzoeken of we met een gegeven algoritme positieve getallen kunnen omzetten in nullen. Meer precies: gegeven zijn twee (of drie) positieve gehele getallen en daarvan willen we er een, (of twee) omzetten in een 0 door het algoritme een of meerdere keren toe te passen. Als je er een voorstelling bij zou willen: de twee (of drie) getallen kunnen de coördinaten van roosterpunten voorstellen in een 2- (of 3-)dimensionaal assenstelsel, orthogonaal of zo je wilt als driehoeksgetallen. Het doel is dan om een (of twee) van de coördinaten 0 te maken. Kennis van getaltheorie en modulair rekenen kan helpen, maar is niet per se noodzakelijk. We beginnen twee-dimensionaal, ofwel twee getallen. We starten met twee gehele positieve getallen a en b.

Algoritme A (voor twee getallen):
Gegeven het getallenpaar (a, b).
We verminderen de grootste van de twee met de kleinste en verdubbelen de kleinste.

Voorbeeld:
Als $a \geq b$ krijgen we $(a - b, 2b)$.
Met $(a, b) = (9, 1)$ wordt dit achtereenvolgens (8, 2), (6, 4), (2, 8), (4, 6), ... Je krijgt een cykel en als punt komt hij dus nooit op een as terecht. Het doel om een van de getallen 0 te maken wordt hier dus nooit bereikt.

Ga na dat bij herhaald toepassen van algoritme A er drie mogelijkheden zijn:
I) Een van de getallen wordt na zekere tijd 0.
II) We krijgen geen 0, maar wel direct een cykel, ofwel als we starten met (a, b) hebben we na een tijdje weer (a, b) of (b, a). Voor het bepalen van de lengte van zo'n cykel beschouwen we daarbij (a, b) en (b, a) als gelijk.
III) We krijgen ook een cykel (zonder 0), maar via een aanloop. Punt (9, 1) is dus een voorbeeld van III, via een aanloop komt hij in een cykel van lengte 2.

Opgave 1a: Zoek een voorbeeld van mogelijkheid I.
Opgave 1b: Zoek een voorbeeld (niet 9, 1) dat al of niet direct in een cykel van lengte 2 terechtkomt. Idem ook lengte 3 en lengte 4.
Opgave 1c: Hoe kun je aan de startgetallen direct bepalen of we met mogelijkheid I , II dan wel III hebben te doen?
Opgave 1d: Geef een bewijs van je conclusies bij opgaven 1c.

En nu driedimensionaal: punt (a, b, c), ofwel drie getallen. Weer met alle drie geheel en positief.
We moeten nu het algoritme iets nader specificeren.

Algoritme B (voor drie getallen):
We kiezen nu elke keer twee van de drie getallen (een paartje) en passen daar het eerder beschreven algoritme A op toe. Het derde niet-gekozen getal blijft ongewijzigd. Zo geeft bijvoorbeeld punt (a, b, c) , met $a \geq c$ bij de keuze van het paartje (a, c) de getallen $(a - c, b, 2c)$. Daarna kun je hier weer een paartje uit kiezen en de handeling herhalen. Er zijn dus bij elke stap drie keuzemogelijkheden om een paartje te kiezen.

Opgave 2a: Bij welke startgetallen (een verband) kunnen we nu twee nullen krijgen, ofwel hoe kunnen we zorgen dat het als punt op een as terechtkomt? Geef, als je geen algemene regel kunt vinden, een voorbeeld.
Opgave 2b: Probeer met de startgetallen (18, 19, 30) en (34, 57, 70) bij elk minstens een nul te maken en dat in zo min mogelijk stappen.

Het lijkt erop dat het eigenlijk altijd lukt om minstens één nul te maken, maar een bewijs of dat al of niet waar is kregen we niet sluitend. Wel lukt dat bijvoorbeeld als een van de getallen een macht is van 2, dus 2^k ($k \geq 0$ en geheel). Of met twee getallen zoals bedoeld in opgave 1c.

Opgave 2c: Kun je aantonen dat, als een van de getallen een tweemacht is (2^k) er altijd een nul is te maken? Als het niet lukt voor willekeurige k, toon het dat aan voor $k = 0$ en $k = 1$.
Extra: Onderzoek (bewijs) of het al of niet lukt voor elk willekeurig drietal om minstens één nul te maken.

Maar om wat meer vrijheid te geven, kunnen we in het algoritme meer keuzemogelijkheden geven. Dan is de mogelijkheid om voor elke drie startgetallen een of twee van de getallen naar 0 te brengen veel groter.

Algoritme C (voor drie getallen met extra keuzemogelijkheden):
We kiezen ook hier weer een paartje. We trekken de kleinste van die twee weer af van de grootste. Ook nu gaan we een getal verdubbelen. Dat mag nu de kleinste van het paartje zijn of het derde, niet-gekozen getal. Er is wel een beperking: zodra een van de getallen 0 is mag die niet meer meedoen, dus kunnen we alleen verder met de andere twee getallen
Met de getallen ($a \geq b \geq c$) kiezen we bijvoorbeeld het paartje (a, c). Een van de nieuwe getallen wordt dan $a - c$. Nu mogen we kiezen uit b en c. Een van de twee blijft onveranderd en de andere verdubbelen we. Dat kan dus worden ($a - c$, b, $2c$) of ($a - c$, $2b$, c).
Met $a \geq b \geq c$ zijn er nu dus zes mogelijkheden: drie mogelijkheden om een paartje te kiezen en twee mogelijkheden voor verdubbeling.
Voorbeeld: voor (9, 5, 3) kunnen we na de eerste stap krijgen: (4, 10, 3), (4, 5, 6), (6, 10, 3), (6, 5, 6), (18, 2, 3) of (9, 2, 6). Vervolgens kunnen we bepalen wat de volgende stap ons allemaal kan opleveren. Maar met bijvoorbeeld (0, 10, 3) krijgen we alleen (0, 7, 6), vervolgens (0, 1, 12), (0, 2, 11), (0, 4, 9), (0, 8, 5), (0, 3, 10), ...

Opgave 3a: Onderzoek of en zo ja hoe je van de getallen (4, 5, 6) twee nullen kunt maken, ofwel een punt op een van de assen. Idem voor (34, 57, 70).
Opgave 3b: Kun je bewijzen dat er voor elk gekozen drietal minstens één nul is te maken? Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
Opgave 3c: Kun je bewijzen dat er altijd twee nullen zijn te maken? Zo nee, geef een tegenvoorbeeld. (Als je dit hebt bewezen is opgave 3b natuurlijk overbodig).

Een paar tips die wellicht voor de bewijzen handig zouden kunnen zijn:
Als de twee of drie getallen een gemeenschappelijke deler hebben kunnen we die als het ware buiten haakjes brengen.
Uit de getaltheorie: de stelling van Euler: Als ggd(a, M) = 1, dan is er een k zodat a^k mod(M) = 1 mod(M). Het zou in bepaalde gevallen handig kunnen zijn om de getallen in het 2-tallige stelsel te noteren.

Er zijn makkelijke en moeilijke vragen, maar elk vraagonderdeel is 2 punten waard.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 9 oktober a.s. binnen zijn.

Ladderstand

Top 10 van de ladderstand na puzzel 92-6 is:

Naam	Punten	Naam	Punten
G. Bouwhuis	186	K. Vugs	84
H. Bakker	166	F. Göbel	79
J. Guichelaar	154	K. van der Straaten	78
J. Remijn	140	M. Woldinga	75
H. Linders	94	M. Rijnierse	71

We feliciteren G. Bouwhuis van harte met de ladderprijs.

Op de website staan de uitwerkingen van de puzzels t/m 92-6 en de volledige ladderstand.

vakbladeuclides.nl/931puzzel

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2017

19/9 t/m 22/9 UTRECHT
Fifth International Conference on the History of Mathematics Education
Organisatie: NVvW, Freudenthal instituut, Descartes Centr, Universiteit van Utrecht

ma 25/9 UTRECHT
Optimaal voorbereid naar het eindexamen
Organisatie: NVvW en SLO

vr 29/9 ROTTERDAM
Symposium aansluiting po-vmbo
Organisatie: NVvW, NVORWO en SLO

za 7/10 UTRECHT
Symposium Het meten van de wereld
Organisatie: Werkgroep geschiedenis van de NVvW

za 4/11 VEENENDAAL
Jaarvergadering / studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

vr 10/11 EINDHOVEN
Prijsuitreiking Nederlandse wiskundeolympiade
Organisatie: NWO

za 18/11 UTRECHT
Ars et Mathesis-dag
Organisatie: Ars et Mathesis

2018

22/1 t/m 1/2 LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie: NWO

do 25/1 UTRECHT
Onderbouwconferentie vmbo, havo, vwo
Organisatie: NVvW, NVORWO, SLO

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 93

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	31 oktober 2017	28 augustus 2017
3	19 december 2017	16 oktober 2017
4	30 januari 2018	20 november 2017
5	20 maart 2018	8 januari 2018
6	8 mei 2018	5 maart 2018
7	26 juni 2018	30 april 2018

CASIO®

Casio fx-82EX

Pretty in Pink...

Met een goed introductieaanbod!



De Casio fx-82EX onderscheidt zich door zijn enorme rekenkracht, hoge resolutie display, vele handige functies…en binnenkort ook zijn kleur. Voor het nieuwe schooljaar is deze krachtige calculator ook verkrijgbaar in roze. Wilt u hem als eerste ontvangen? Bestel dan nu en profiteer van ons introductieaanbod.

Introductie-
aanbod

€ 6,95*

Bestel direct

Stuur een e-mail naar **educatie@casio.nl.** Vermeld in de e-mail uw naam, de naam en het adres van uw school, het schooltype en uw mobiele telefoonnummer. Zodra de Casio fx-82EX in roze beschikbaar is (juni 2017) ontvangt u deze direct.

CLASSWIZ

*U betaalt slechts € 6,95 inclusief btw en verzending. Dit introductieaanbod is alleen geldig voor wiskundedocenten, 1 exemplaar per docent.